МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ БІЗНЕС-КОЛЕДЖ

О.О. Ходаковська,
О.В. Кацімон

ЦІКАВІ РОЗКЛАДИ МАТРИЦЬ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДЛЯ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

ЧЕРКАСИ – 2020

УДК 512.643 (075.8)

Рекомендовано до друку рішенням методичної ради Черкаського державного бізнес-коледжу. Протокол № 3 від 28 грудня 2020 р.

Автори: Ходаковська О.О., Кацімон О.В.
Цікаві розклади матриць та їх застосування
для розв'язування систем лінійних рівнянь.
Видання друге та перероблене
Черкаси, 2020 р. – 36 с.

Рецензент: В.В. Атамась, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих систем Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького

Навчально-методична розробка містить нестандартні розклади матриць, які можна використовувати для розв'язування систем лінійних рівнянь. Посібник призначений для студентів та викладачів закладів вищої та фахової передвищої освіти.

Затверджено на засіданні циклової комісії
фундаментальних дисциплін
Протокол №4 від 25 листопада 2020 р.

Зміст

Передмова

Факторізація матриць – це розклад матриці на добуток кількох матриць, які мають певні властивості. Факторизація матриць – важливий розділ алгебри, який використовується при розв'язуванні практичних задач. Часто розклад матриці у добуток простіших матриць зменшує кількість операцій при розв'язуванні систем лінійних рівнянь за допомогою комп'ютерів. Тому задачі факторизації матриць розглядається в курсі лінійної алгебри для програмістів та прикладних математиків.

Навчально-методична розробка містить приклади розв'язування типових задач факторизації матриць та задачі для самостійного розв'язування.

Посібник призначений для студентів денної та заочної форми навчання закладів вищої та фахової передвищої освіти і відповідає програмі курсів «Вища математика» та «Лінійна алгебра і теорія чисел».

§1. Трикутний розклад і зміна рядків

Нехай дана матриця $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ Виконаємо елементарні перетворення векторів-рядків даної матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В результаті одержали матрицю $U=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Покажемо інший спосіб отримання матриці U. Матриця $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - це матриця для першого кроку елементарних перетворень, яка містить одиниці на головній діагоналі і елемент l_{12}=-2, решта елементів матриці нулі. В результаті множення матриць EA отримаємо нуль на (2,1) місці. Матриця для другого кроку елементарних перетворень $F=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ з елементом

l_{31}=-3, одиницями на головній, решта елементів нулі. Добуток FEA приведе до появи нуля на (3,1) місці. Аналогічно матриця G= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ для третього кроку елементарних перетворень з елементом l_{32}=-2, одиницями на головній діагоналі, решта елементів нулі. В результаті отримаємо, що

GFEA=U

$$GFEA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = U$$

Оберненими до матриць G, F, E будуть відповідно матриці:

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

З рівності GFEA=U слідує, що $E^{-1}F^{-1}G^{-1}U=A$. Знайдемо матрицю $L= E^{-1}F^{-1}G^{-1}$.

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-l_{21}&1&0\\-l_{31}&-l_{32}&1\end{pmatrix}$$

$$LU=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&7\\0&-3&-6\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&8\end{pmatrix}=A$$

Отримані в результаті таких дій матриці L і U утворюють розклад матриці A=LU, де L – нижня трикутна матриця з одиницями на головній діагоналі і елементами $-l_{ij}$, взятих з елементарних перетворень, U – верхня трикутна матриця, яка з'являється в результаті елементарних перетворень матриці A.

Розклад A=LU є дуже важливий в курсі лінійної алгебри. Це більше, ніж просто запис кроків елементарних перетворень. Він дає можливість простішого розв'язання системи лінійних рівнянь Ax = b. Фактично матриця A може бути відновлена, якщо відомі L і U. В термінах матриць цей розклад розділяє систему лінійних рівнянь Ax = b на дві трикутні системи Lc = b і Ux = c, які тотожні Ax = b.

Помноживши друге рівняння на L одержимо LUx = Lc, що і є Ax = b. Кожну трикутну систему можна швидко розв'язати. Такий розклад зменшує кількість кроків при розв'язанні системи Ax = b з $\frac{n^3}{3}$ до n^2 кроків для будь-якої правої частини.

Приклад. Розв'язати систему лінійних рівнянь Ax = b, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Розклад A=LU вже знайдений.

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

В результаті одержимо дві трикутні системи $Lc = b$, $Ux = c$

Розв'язавши їх знайдемо розв'язок початкової системи лінійних рівнянь.

$$Lc = b \quad \begin{cases} c_1 = 1 \\ 2c_1 + c_2 = 3 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

$$Ux = c \quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 1 \\ -3x_2 - 6x_3 = 1 \\ -x_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{3} \\ x_2 = \dfrac{5}{3} \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Зауваження. Форма LU є несиметричною: U має деякі елементи на головній діагоналі, тоді як L завжди має одиниці на головній діагоналі. Це можна легко скоректувати, розклавши матрицю U на дві матриці:

$$U = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & d_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{u_{12}}{d_1} & \dfrac{u_{13}}{d_1} & ... & \dfrac{u_{1n}}{d_1} \\ 0 & 1 & \dfrac{u_{23}}{d_2} & ... & \dfrac{u_{2n}}{d_2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

В нашому випадку $U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Трикутний розклад записують A=LDU, де L і U з одиницями на головній діагоналі, а D – діагональна матриця.

$$A = LDU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

§2. Зміна рядків. Перестановочна матриця

Розв'язати систему лінійних рівнянь Ax = b, де

$$A=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ d & e & f\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 28\end{pmatrix}$$

В такому випадку розкласти матрицю A=LU неможливо. Існують спеціальні матриці, при множенні на які можна переставити рядки.

Матриця $P_{12}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ переставляє 1 і 2 рядки.

Матриця $P_{23}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ переставляє 2 і 3 рядки.

$$P_{23}P_{13}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=P$$

$$PA=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

Матриця PA вже трикутна. Розв'яжемо систему лінійних рівнянь PAx = Pb.

$$Pb=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28\\4\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}4x+5y+6z=28\\y+2z=4\\3z=3\end{cases}\quad\begin{cases}x=3\\y=2\\z=1\end{cases}$$

Даний розв'язок і буде розв'язком системи лінійних рівнянь Ax = b.

В загальному випадку перестановочна матриця P переставляє рядки матриці A, уникаючи нулів на головній діагоналі. В цьому випадку PA може бути розкладена на LU, тобто PA = LU.

Приклад. Знайти розклад PA=LDU для матриці A= $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\2&3&4\end{pmatrix}$

$$P=P_{23}P_{13}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$PA=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$PA=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&3&4\\0&1&1\\0&-\frac{3}{2}&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&3&4\\0&1&1\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=U$$

$$PA=LU_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&4\\0&1&1\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$PA=LDU=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

§3. Прямокутні матриці з ортонормованими стовпцями. Процес Грамма-Шмідта

Нехай маємо три незалежних вектора a, b, c. Ортогоналізуємо дану систему векторів.

$q_1 = \frac{a}{\|a\|}$ - одиничний вектор.

$b' = b - (q_1^T b)q_1$

Вектор b' ортогональний вектору q_1.

$q_2 = \frac{b'}{\|b'\|}$ - одиничний вектор.

$c' = c - (q_1^T c)q_1 - (q_2^T c)q_2$

Вектор c' ортогональний до q_1 і q_2.

$q_3 = \frac{c'}{\|c'\|}$

В результаті ми одержали ортонормовану систему векторів, які утворюють ортогональну матрицю Q.

Процес Грамма-Шмідта [10] починається з незалежних векторів a_1, a_2,..., a_n і закінчується ортонормованими векторами q_1, q_2,…, q_n. На j-ому кроці віднімаємо від a_j його координати в напрямках, які вже встановлені:

$a'_j = a_j - (q_1^T a_j)q_1 - \ldots - (q_{j-1}^T a_j)q_{j-1}$ і $q_j = \dfrac{a'_j}{\|a'_j\|}$ - одиничний вектор.

§4. Розклад A=QR

Встановимо зв'язок між матрицями A і Q. Вектори a і q_1 лежать на одній прямій. Кожен вектор площини є лінійною комбінацією векторів q_1 і q_2 :

$$b = (q_1^T b)q_1 + (q_2^T b)q_2 .$$

Аналогічно c є лінійною комбінацією векторів q_1, q_2, q_3 :

$$c = (q'_1 c)q_1 + (q'_2 c)q_2 + (q'_3 c)q_3$$

Виразивши це в матричній формі отримаємо новий розклад A=QR.

$$\begin{pmatrix} & & \\ a & b & c \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^T a & q_1^T b & q_1^T c \\ 0 & q_2^T b & q_2^T c \\ 0 & 0 & q_3^T c \end{pmatrix}$$

Розклад A=QR подібний до A=LU, але зараз перший множник Q має ортонормовані стовпці, а другий множник R – верхня трикутна матриця.

Приклад 1. Знайти розклад матриці A=QR

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ -2 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

Розв'язання:

$$q_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$b'=b-(q_1^T b)q_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 4\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 4\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

$$q_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$c' = c - (q_1^T c)q_1 - (q_2^T c)q_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$q_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = QR = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Приклад 2. Знайти розклад матриці A=QR

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$a=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\quad c=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$q_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \end{pmatrix}$$

$$b'=b-(q_1^T b)q_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 1\\ \end{pmatrix}$$

$$\|b'\| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$q_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

$$c' = c - (q_1^T c)q_1 - (q_2^T c)q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\-\frac{1}{6}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$\|c'\|=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$q_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\qquad R=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{3}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&0&\frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

Можливо розклад QR є не такий гарний, як LU (тому, що є квадратні корені), але обидва розклади є важливими в курсі лінійної алгебри. Розклад LU ввів Герц [10], а розклад QR ввів Авіс [10].

Зауваження. Кожну матрицю A розмірності $m \times n$ з лінійно незалежними стовпцями можна розкласти на множники A=QR. Колонки Q є ортонормованими, а матриця R верхня трикутна. Якщо m=n, то всі матриці квадратні і Q стає ортогональною матрицею.

Приклад 3. Розв'язати систему лінійних рівнянь, використовуючи розклад A=QR.

$$Ax = b \;\Rightarrow\; QRx = b \;\Rightarrow\; A^T QRx = A^T b \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; R^T Q^T QRx = R^T Q^T b \;\Rightarrow\; R^T Rx = R^T Q^T b \;\Rightarrow\; Rx = Q^T b$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A = QR = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Q^T b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Отримаємо систему лінійних рівнянь $Rx = Q^T b$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_2 = -3 \\ 3x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3} \\ x_2 = \dfrac{5}{3} \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

§5. Інші цікаві розклади матриць

Використовуючи розклади матриці A можна розв'язати систему лінійних рівнянь Ax = b, якщо:

1. A=LU, тоді Lc=b, Ux=c, $x=U^{-1}L^{-1}b$;
2. A=QR, тоді Qc=b, Rx=c, $x=R^{-1}Q^{T}b$.

Розглянемо розклади матриць:

1. Розклад Чолескі [10] для симетричної матриці A:

   $$A = LDL^T = (LD^{\frac{1}{2}})(LD^{\frac{1}{2}})^T,$$

   де $D^{\frac{1}{2}}$ - діагональна матриця, яка утворюється з D добуванням квадратного кореня з її елементів.
2. Скорочений розклад:

   $A = \underline{L}\underline{U}$,

   де матриці мають такі розмірності $\underline{\boldsymbol{L}}_{m\times r}$, $\underline{\boldsymbol{U}}_{r\times n}$, $A_{m\times n}$

1. Якщо матриця A симетрична, то $L^T = U$ і в такому випадку $A=LDL^T=LDU$.

Приклад 1.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 3 & 2 & 1\\ 5 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$A=LU=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & -7 & -14\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -7 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=LDL^T$$

Приклад 2.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

1) Знайдемо $A^T A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Стовпці матриці A′ є вектори a,b′,c′ із прикладу 2 (§4) - ортогоналізовані вектори-стовпці.

2) Знайдемо довжини векторів-стовпців матриці A′.

$$\|a\|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$\|b'\|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{3}{2}$$

$$\|c'\|^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

3) Розкладемо матрицю $A^T A = LU = LDL^T$

a) Знайдемо матрицю U

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = U$$

$b)$ Знайдемо L

$$l_{21} = -\frac{1}{2} \qquad l_{31} = -\frac{1}{2} \qquad l_{32} = -\frac{1}{3}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$c)\ A^T A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LDL^T$$

3) Знайдемо матрицю D іншим способом $D = (A')^T A'$

$$(A')^T A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = D$$

5) Знайдемо матрицю Q іншим способом

$$Q = A(L^T)^{-1} D^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{4}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

6) Знайдемо R іншим способом

$$R = D^{\frac{1}{2}}L^T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$A = QR = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Матриця $D^{\frac{1}{2}}L^T$ та ж сама матриця R з процесу Грамма-Шмідта [10]. Одержані в результаті матриці Q і R дають розклад A=QR.

2. Скорочений розклад $A = \underline{L}\underline{U}$

Подібно симетричному розкладу LDL^T він є кращий, ніж A=LU, але дещо відрізняється. Якщо A має ранг r, ми маємо тільки r стовпців в матриці L і r рядків в U. Останні m-r рядків U можна відкинути. Останні n-r стовпців матриці L теж можна відкинути. В результаті множення $\underline{L}\underline{U}$ ми одержуємо ту ж матрицю A. Матрицю рангу r можна розкласти на добуток матриць розмірностей $m\times r, r\times n$. У випадку, коли матриця А потребує перестановки рядків, то PA=LU і необхідна незначна зміна: $\underline{L}$ формується з перших r стовпців $P^{-1}L$ замість L.

В кожному випадку r стовпців $\underline{L}$ є базисом для векторів-стовпців А, і r рядків $\underline{U}$ є базисом для векторів-рядків А.

Приклад. Розкласти матрицю $A=\underline{L}\underline{U}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Базиси векторів-стовпців і векторів-рядків співпадають, тому

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}=\underline{L}\underline{U}$$

§6. Задачі для самостійного розв’язування

1. Розкласти на множники L і U матриці:

$$a)\, A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad b)\; A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Розкласти на множники L і U матрицю A і розв’язати систему лінійних рівнянь

$$Ax=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3. Знайти розклад PA=LDU

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Розкласти матрицю A на множники Q і R

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Розкласти матрицю A на множники Q і R

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Розв'язати систему лінійних рівнянь використовуючи розклад A=QR

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7. Розкласти матрицю $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & 0 \end{pmatrix}$ на QR врахувавши, що перший стовпчик уже одиничний вектор.

8. Для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \\ 5 & 0 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ знайти ортонормований базис для векторів- стовпчиків, записати A=QR, розв'язати систему лінійних рівнянь Ax=b, якщо b=(-3,7,1,0,4).

9. Розкласти матрицю A на множники $\underline{L}\underline{U}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

10. Зробити розклад Чолескі для матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 45 \end{pmatrix}$$

Список рекомендованої літератури

1. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. М: Физматлит. 2002. 248 с.
2. Завало С.Т., Костарчук В.Н., Хацет Б.И. Алгебра і теорія чисел. К.: Вища школа. 1983. 384 с.
3. Завало С.Т. Алгебра і теорія чисел: Практикум. Частина 1. К.: Вища школа. 1983. 232 с.
4. Діскант В.І., Береза Л.Р.,Грижун О.П., Захаренко Л.М. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. К: Вища школа. 2001. 86 с.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука. 1971. 431 с.
6. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М.: Наука. 1975. 400 с.
7. Нечаев В.А. Задачник-практикум по алгебре (Группы. Кольца. Поля. Векторные и евклидовые пространства. Линейные отображения. М.: Просвещение, 1983. 120 с.
8. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Физматлит. 1965. 320 с.
9. Фадєєв Д.К., Сомінський І.С. Збірник задач з вищої алгебри. К.: Вища школа. 1971. 529 с.
10. Strang Gilbert, Brooks Thomson. Linear Algebra and its applications. Massachusetts Institute of Technology. 2006. 487 p.

ПРО АВТОРІВ

Ходаковська Олена Олександрівна – викладач циклової комісії фундаментальних дисциплін Черкаського державного бізнес-коледжу з 2005 року. Закінчила з відзнакою математичний факультет Черкаського національного університету ім. Б. Хмельницького (2005 р.), спеціаліст вищої категорії. Співавтор заочних математичних студій для школярів „Я і моя математика" (5 частин) (2005 р.). Автор методичних посібників для студентів заочної форми навчання: „Дискретна математика" (2006 р.), „Вища математика" (2006 р.), „Вища математика для студентів заочної форми навчання зі спеціальності „Обслуговування комп'ютерних та інтелектуальних систем і мереж" (2006 р.), Дискретна математика. Курс лекцій та практичні завдання (2009 р.), Теорія ймовірностей та математична статистика. Збірник задач (2013 р.), Лінійна алгебра. Частина І: Навчально-методичний посібник (2014 р.), Лінійна алгебра. Частина ІІ: Навчально-методичний посібник (2015 р.), Лінійна алгебра. Частина ІІІ: Навчально-методичний посібник (2015 р.), Теорія многочленів. Частина І: Навчально-методичний посібник (2018 р.), Теорія многочленів. Частина ІІ: Навчально-методичний посібник (2018 р.).

Кацімон Оксана Василівна – викладач циклової комісії фундаментальних дисциплін Черкаського державного бізнес-коледжу з 1997 року. Закінчила Черкаський державний педагогічний інститут ім. 300-річчя возз'єднання України з Росією за спеціальністю „Математика" (1993р.). Спеціаліст вищої категорії, викладач-методист. Є автором навчально-методичних видань "Вища математика. Методичні рекомендації" (2002р.), "Вища математика. Збірник задач" (2005р.), "Вища математика. Збірник задач. Частина ІІ" (2010р.), "Диференціальні рівняння. Курс лекцій "(2016), "Диференціальні рівняння. Збірник тестових завдань . "(2020),"Вища математика. Тестові завдання І частина". (2020).

Навчальне видання

Ходаковська Олена Олександрівна

Кацімон Оксана Василівна

Цікаві розклади матриць та їх застосування для розв'язування систем лінійних рівнянь

Комп'ютерний набір О.О. Ходаковська

Підписано до друку 28.12.2020. Формат 60х84
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman. Друк офсетний.
Умов. друк. арк. 1,5. Тираж 15 прим. Зам. № 290

За довідками з питань реалізації
звертатись за тел. (0472) 64-05-15