МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ БОГДАНА ХМЕЛЬНИЦЬКОГО

О. О. Ходаковська, В. В. Атамась,
О.В. Кацімон, В.С. Фай

ТЕОРІЯ МНОГОЧЛЕНІВ

Частина ІІІ

Навчально–методичний посібник

Черкаси – 2022

УДК
ББК
Х 69

Рецензенти:

В. С. Ковтуненко – кандидат фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри фундаментальних дисциплін та прикладного матеріалознавства Черкаського державного технологічного університету

І. А. Акуленко – доктор фізико-математичних наук, професор з кафедри алгебри і математичного аналізу Черкаського націанольного університету імені Богдана Хмельницького

Рекомендовано до друку Вченою радою Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького (протокол №)

Ходаковська О.О., Атамась В.В., Кацімон О.В., Фай В.С.

Х 69 Теорія многочленів. Частина ІІІ: Навчально-методичний посібник / [О. О. Ходаковська, В. В. Атамась, О.В. Кацімон, В.С. Фай]. Черкаси: ЧНУ імені Богдана Хмельницького, 2022. 47 с.

ISBN

Матеріал посібника призначений для ефективної самостійної роботи студентів вищих навчальних закладів стаціонарної та заочної форми навчання та підготовки їх до занять.

Посібник містить тематичні тести по темах «Многочлени від однієї змінної», «Многочлени від кількох змінних», «Многочлени над числовими полями».

УДК
ББК
ISBN

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Курс «Теорія многочленів» за навчальними програмами вищих навчальних закладів входить як розділ до курсу «Вища математика». Вивчення курсу передбачає розширення і поглиблення знань студентів по темі «Многочлени» з шкільного курсу математики.

Даний навчально-методичний посібник містить тести по темах «Многочлени від однієї змінної», «Многочлени від кількох змінних», «Многочлени над числовими полями».

Матеріал посібника допоможе студентам вищих навчальних закладів, які вивчають курс «Лінійна алгебра», «Аналітична геометрія та лінійна алгебра», «Вища математика» в організації самостійної роботи та підготовці до занять.

Навчальний посібник містить словник основних понять та означень многочленів, що значно полегшує самостійну роботу студентів.

ТЕМАТИЧНІ ТЕСТИ

ТЕСТ 1. Подільність. Взаємнопрості многочлени. НСД та НСК многочленів. Раціональні дроби

1) Чи є многочленом від змінної x чи y вираз:

   а) $\log_3 2x^3 + 5x^2 - 3x + \cos\frac{\pi}{3}$;

   б) $7y^3 + bxy - 1,\ b \neq 0$;

   в) $7y^3 + bxy - 1,\ b = 0$;

   г) $x^2 + 3x - 4$.

2) Який степінь має многочлен $f(x) = 4x + 3x^4 + 4x^3 + 10$:

   а) 3;
   б) 4;
   в) 8;
   г) 7.

3) Канонічною формою многочлена $f(x)$ називається такий запис:

   а) коли його члени впорядковані в довільному порядку;

   б) коли його члени впорядковані за спаданням степеня x^k;

   в) коли його члени впорядковані за зростанням степеня x^k;

   г) коли його члени впорядковані за спаданням значення коефіцієнта.

4) Які з многочленів записані в канонічній формі:

   а) $\left(1+\sqrt{2}\right)x^4 + ax^2 - x\cos\frac{\pi}{12} - 1$ над полем R;

   б) $\left(1-i^{2005}\right)x^3 + (1+i)^{2004}x^2 + (1-i)^{2005}x + i$ над полем C;

   в) $\left(x^2-3\right)\left(x^2+3\right)+18$ над кільцем Z;

   г) $\overline{6}x^5 + \overline{4}x^3 + \overline{2}x$ над полем $Z_7[x]$.

5) Допишіть нерівність: $\deg\left(f(x)+g(x)\right)$...

а) $\geq \max\left(\deg f\left(x\right), \deg g\left(x\right)\right)$;

б) $\geq \min\left(\deg f\left(x\right), \deg g\left(x\right)\right)$;

в) $\leq \max\left(\deg f\left(x\right), \deg g\left(x\right)\right)$;

г) $\leq \min\left(\deg f\left(x\right), \deg g\left(x\right)\right)$.

6) При яких a, b та c многочлени $g\left(x\right) = 2x^3 + 5x^2 + 8x + 7$ та $f\left(x\right) = ax\left(x^2 + 3\right) + bx\left(x - 1\right) + c\left(x + 1\right)$ з кільця $Z\left[x\right]$ рівні між собою?

а) $a = 2,\ b = 5,\ c = 9$;

б) $a = 2,\ b = 5,\ c = 8$;

в) $a = 3,\ b = 1,\ c = 7$;

г) $a = 2,\ b = 5,\ c = 7$.

7) У кільці $P[x]$ многочлени $f\left(x\right)$ і $g\left(x\right)$ …, якщо вони відрізняються лише множником, який є відмінною від нуля константою.

а) незвідні;

б) асоційовані;

в) подібні;

г) звідні.

8) Знайти суму коефіцієнтів многочлена $f\left(x\right) = \left(\overline{2}x - \overline{3}\right)\left(x + \overline{4}\right)^2$ з кільця $Z_5\left[x\right]$:

а) –5;

б) 24;

в) 0;

г) –25.

9) Як називається многочлен $s\left(x\right)$ у виразі $f(x) = g(x)s(x) + r(x)$?

а) ділене;

б) частка;

в) остача;

г) дільник.

10) Як називається вираз виду $d(x)=U(x)f(x)+V(x)g(x)$:

а) лінійний запис НСД;
б) лінійний запис НСК;
в) лінійне представлення НСД;
г) лінійне представлення НСК.

11) … називається будь-який многочлен $s(x)\in P[x]$ такий, що $s(x)\vdots f(x)\wedge s(x)\vdots g(x)$:

а) СД;
б) НСК;
в) НСД;
г) СК.

12) Якщо $f(x)\vdots p(x)\wedge g(x)\vdots p(x)$, то $p(x)\in P[x]$ називається:

а) СД;
б) НСК;
в) НСД;
г) СК.

13) Многочлен $f(x)\in P[x]$ називається … у полі P, якщо $\deg f(x)\geq 1$ і в кільці $P[x]$ існують многочлени $s(x)$ і $g(x)$ такі, що $f(x)=g(x)s(x)$, $\deg g(x)\geq 1$ і $\deg s(x)\geq 1$.

а) незвідним;
б) асоційованим;
в) симетричним;
г) звідним.

14) Чи вірне твердження: многочлен першого степеня над будь-яким полем P є звідним у кільці $P[x]$?

а) так;
б) ні;
в) в окремих випадках;
г) можливо.

15) Поле L, де многочлен $f(x)$ розкладається на лінійні множники, називається:

а) канонічним полем;

б) полем розкладу;
в) кратним полем;
г) звідним полем.

16) Якщо $(f,g)=1$, то многочлени $f(x)$ і $g(x)$ називаються:
а) асоційованими;
б) звідними;
в) незвідними;
г) взаємно простими.

17) Число всіх можливих коренів многочлена $f(x)$ степеня n над полем P … :
а) дорівнює n;
б) не перевищує n;
в) більше n;
г) менше n.

18) Скільки многочленів можуть бути найменшим спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$ у кільці $Z_5[x]$:
а) 2;
б) 1;
в) 4;
г) безліч.

19) Скільки многочленів можуть бути найменшим спільним кратним многочленів $f(x)$ і $g(x)$ у кільці $Z_5[x]$:
а) 2;
б) 1;
в) 4;
г) безліч.

20) Раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ називається неправильним, якщо:
а) $\deg f(x) \le \deg g(x)$;
б) $\deg f(x) > \deg g(x)$;
в) $\deg f(x) = \deg g(x)$;
г) $\deg f(x) \ge \deg g(x)$.

21) $\left[f(x), g(x)\right]$ – це …

а) СД;
б) СК;
в) НСК;
г) НСД.

22) Як називається вираз $f(x) = p_1(x)\, p_2(x) \cdot \ldots \cdot p_k(x)$:

а) канонічний розклад многочлена $f(x)$;

б) розклад многочлена $f(x)$ на множники;

в) лінійне представлення многочлена $f(x)$;

г) розклад многочлена $f(x)$ на незвідні множники.

23) Елементарним дробом у полі P називається раціональний дріб виду:

а) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, де $g(x)$ – звідний у полі P, $\deg f(x) \le \deg g(x)$;

б) $\dfrac{f(x)}{\left(g(x)\right)^k}$, де $g(x)$ – незвідний у полі P,

$\deg f(x) \ge \deg g(x)$, $k \in N$;

в) $\dfrac{f(x)}{\left(g(x)\right)^k}$, де $g(x)$ – незвідний у полі P,

$\deg f(x) \le \deg g(x)$, $k \in N$;

г) $\dfrac{f(x)}{\left(g(x)\right)^k}$, де $g(x)$ – звідний у полі P,

$\deg f(x) \le \deg g(x)$, $k \in N$.

24) Який з раціональних дробів є елементарним над полем Q:

а) $\dfrac{2x^2+1}{\left(x^3+2\right)^3}$;

б) $\dfrac{3x+1}{(x-1)^2}$;

в) $\dfrac{x^2-1}{x^2+3}$;

г) $\dfrac{4}{(x+1)^2}$.

25) Неправильний дріб $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ над полем P можна подати як …:

а) суму многочлена і неправильного дробу;
б) різницю многочлена і правильного дробу;
в) суму многочлена і правильного дробу;
г) суму многочленів.

26) Нехай маємо деякий многочлен $f(x)$. Тоді запис $f(a)$ означає:

а) a – корінь многочлена $f(x)$;

б) значення многочлена $f(x)$ при $x=a$.

27) Нехай є довільний многочлен $f(x)$. Що розуміється під записом $f(a)=0$?

а) a – корінь многочлена $f(x)$;

б) значення многочлена $f(x)$ при $x=a$.

28) Чи вірно, що коли многочлени рівні між собою функціонально, то вони рівні і алгебраїчно?

а) так;
б) ні;
в) практично завжди;
г) майже ніколи.

29) Чи справедливе таке твердження: $\deg f'(x)=\deg f(x)+1$?

а) так;
б) ні;
в) залежно від початкових умов;

г) не знаю.

30) Чи рівносильні алгебраїчне та функціональне тлумачення поняття кореня многочлена над довільною областю цілісності:

а) так;
б) ні;
в) за певних умов;
г) можливо.

31) У кільці $Z_5[x]$ виконуються рівності $(x+\overline{1})^2 = x^2+\overline{2}x+\overline{1} = $ $=(\overline{2}x-\overline{3})(\overline{3}x-\overline{2})=(\overline{4}x+\overline{4})^2$. Чи не суперечать вони теоремі про єдиність розкладу многочлена на незвідні множники у кільці $Z_5[x]$?

а) так;
б) ні;
в) можливо.

32) Вкажіть, які з властивостей подільності многочленів над полем P записані без помилок:

а) $f(x)\vdots g(x) \vee g(x)\vdots h(x) \Rightarrow f(x)\vdots h(x)$;
б) $f(x)\vdots h(x) \vee g(x)\vdots h(x) \Rightarrow (f(x)\pm g(x))\vdots h(x)$;
в) $f(x)\vdots g(x) \vee g(x)\vdots f(x) \Rightarrow \exists c\in P[x]\ f(x)=c\cdot g(x)$;
г) $f(x)\vdots g(x) \vee g(x)\vdots f(x) \Rightarrow \forall c\in P[x]\ f(x)=c\cdot g(x)$.

33) Чи вірно записана властивість подільності многочленів $f(x)\vdots h(x) \Rightarrow \exists g(x)\in P[x]\quad f(x)g(x)\vdots h(x)$ над полем P?

а) так;
б) ні;
в) можливо;
г) при певному $g(x)$.

34) Довільний многочлен $f(x)\in P[x]$ ділиться з остачею на будь-який многочлен $g(x)\in P[x], g(x)\neq 0$, при цьому

частка $s(x)$ і остача $r(x)$ належать $P[x]$ і визначаються однозначно, тобто $f(x)=g(x)s(x)+r(x)$, причому …:

а) $r(x)=0 \vee \deg r(x)>\deg g(x)$;

б) $r(x)=0 \vee \deg r(x)\geq\deg g(x)$;

в) $r(x)=0 \vee \deg r(x)<\deg g(x)$;

г) $r(x)=0 \vee \deg r(x)\leq\deg g(x)$.

35) Яке з тверджень неправильне:

а) будь-які многочлени $f(x)$ і $g(x)$ мають тривіальні НСД – дільники одиниці кільця $P[x]$;

б) будь-які многочлени $f(x)$ і $g(x)$ мають тривіальні НСД – дільники нуля кільця $P[x]$;

в) будь-які многочлени $f(x)$ і $g(x)$ не мають тривіальних НСД.

36) Чи вірно, що якщо $d(x)$ – НСД многочленів $f(x)$ і $g(x)$, то $\forall c\neq 0\ c\cdot d(x)$ – НСК многочленів $f(x)$ і $g(x)$?

а) так;

б) ні;

в) при певному c;

г) при певному $g(x)$.

37) Допишіть властивість взаємно простих многочленів $f(x)g(x)\vdots h(x) \wedge (f(x),h(x))=1 \Rightarrow \ldots$:

а) $(f,g)=1$;

б) $g(x)\vdots h(x)$;

в) $f(x)\vdots h(x)$;

г) $g(x)\not\vdots h(x)$.

38) Якщо многочлен $p(x)$ є незвідним над полем $P[x]$, то для будь-якого многочлена $f(x)$ з кільця $P[x]$ …:

а) $p(x) \vdots f(x) \vee (p,f)=1$;

б) $p(x) \vdots f(x) \vee (p,f)=0$;

в) $f(x) \vdots p(x) \vee (p,f)=1$;

г) $f(x) \vdots p(x) \vee (p,f)=0$.

39) Якщо многочлен $p(x)$ є незвідним над полем $P[x]$, то для $\forall c \in P[x]/\{0\}$ многочлен $c \cdot p(x)$ є …:

а) звідним;
б) взаємно простим;
в) асоційованим;
г) незвідним.

40) Допишіть властивість: $\left(f(x),g(x)\right)=1 \wedge \left(f(x),h(x)\right)=1 \Rightarrow$:

а) $\left(f(x),g(x)h(x)\right)=1$;

б) $\left(f(x)g(x),h(x)\right)=1$;

в) $\left(f(x)h(x),g(x)\right)=1$;

г) $\left(h(x),g(x)\right)=1$.

41) **<u>Задача 1.</u>** Остачі від ділення многочлена $f(x)$ з кільця $Z_5[x]$ на $g_1(x)=x+\overline{1}$, $g_2(x)=x-\overline{2}$, $g_3(x)=x+\overline{2}$ відповідно дорівнюють $\overline{1},\overline{2}$ та $\overline{4}$. Знайти остачу від ділення цього многочлена на $g(x)=x^3+x^2-\overline{4}x+\overline{1}$.

а) $x+\overline{3}$;
б) $\overline{2}x+\overline{3}$;
в) $\overline{2}x-\overline{3}$.

42) **<u>Задача 2.</u>** Відокремити кратні множники многочлена $f(x)=x^4+3x^3-3x^2+11x-6$.

а) $f(x)=\left(x^2-x-6\right)(x-1)^2$;

б) $f(x)=\left(x^2-x-6\right)(x-1)$;

в) $f(x)=(x^2-x-6)(x+1)^2$.

43) **<u>Задача 3.</u>** Дослідити на звідність многочлен $f(x)=x^4+1$ в кільці $R[x]$:

а) звідний;

б) незвідний;

в) не можливо визначити.

44) **<u>Задача 4.</u>** Розкласти дріб $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x^2+1}{(x-1)^3}$ на елементарні дроби над полем $Q(x)$:

а) $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)}$;

б) $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2}{(x-1)}+\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)^3}$;

в) $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2}{(x-1)}+\frac{4}{(x-1)}+\frac{3}{(x-1)}$.

ТЕСТ 2. Симетричні многочлени

1) Два члени многочлена, що відрізняються лише коефіцієнтами називаються:
   а) взаємно простими;
   б) асоційованими;
   в) подібними;
   г) незвідними.
2) Степенем члена $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$ називається:
   а) добуток $k_i = k_1 \cdot k_2 \cdot ... \cdot k_n$;
   б) різниця $k_i = k_1 - k_2 - ... - k_n$;
   в) сума $k_i = k_1 + k_2 + ... + k_n$;
   г) добуток $k_i = a(k_1 + k_2 + ... + k_n)$.
3) Який степінь многочлена $f(x, y, z) = x^5 + 4x^4 + 4x^2 - 4x^4yz - 2x^3yz$?
   а) 3;
   б) 4;
   в) 5;
   г) 6.
4) Який „вищий" член многочлена $f(x, y) = 6x - 2y^2 + xy^2 + 3x^2$?
   а) $6x$;
   б) $3x^2$;
   в) $-2y^2$;
   г) xy^2.
5) Який старший член многочлена $f(x) = 6x - 2y^2 + xy^2 - 3x^2$?
   а) $6x$;
   б) $3x^2$;
   в) $-2y^2$;
   г) xy^2.
6) Якщо всі члени многочлена мають однаковий степінь, то многочлен називається:

а) примітивним;
б) подібним;
в) однорідним;
г) зведеним.

7) Який з многочленів записаний лексикографічно:
а) $f\left(x, y, z\right) = -3x^2yz - x^2 + xy^2z^2 + z^4$;
б) $f\left(x, y, z\right) = xy^4z + xyz^4 + x^4yz - x^3y^3 - x^3z^3 - y^3z^3$;
в) $f\left(x, y\right) = x^4 + x^3y + xy^3 - xy^2 + 2y$;
г) $f\left(x, y\right) = y^3 + 2y^2x + yx^2$.

8) Якщо многочлени p та q незвідні у полі P і $p \vdots q$, то вони:
а) примітивні;
б) звідні;
в) асоційовані;
г) прості.

9) Многочлен $f\left(x\right) \in S\left[x\right],\ f\left(x\right) \neq 0$ називається …, якщо НСД його коефіцієнтів рівний 1.
а) асоційованим;
б) звідним;
в) симетричним;
г) примітивним.

10) Який з цих многочленів симетричний?
а) $f\left(x, y\right) = 2x + 2y + 3xy - x^2 - 3y^2$;
б) $f\left(x, y\right) = x + 2ixy + y$;
в) $f\left(x, y, z\right) = xy + xz + yz - 2x - 2y - 2z + 3$;
г) $f\left(x, y, z\right) = x^2y - 3x^3 + 2x^4 - xy^3$.

11) Як виражається через елементарні симетричні многочлени сума $S_2 = x^2 + y^2$?
а) $S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$;
б) $S_2 = \sigma_1 - 2\sigma_2^2$;
в) $S_2 = \sigma_1 - 2\sigma_2$;

г) $S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_1$.

12) Нехай $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ і $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$, де $a_n, b_n \neq 0$ і $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – корені $f(x)$, тоді результант $f(x)$ і $g(x)$ має вигляд:

а) $R(f,g) = a_m^n g(a_1) g(a_2) ... g(a_n)$;

б) $R(f,g) = a_n^m g(a_1) g(a_2) ... g(a_n)$;

в) $R(g,f) = a_m^n g(a_1) g(a_2) ... g(a_n)$;

г) $R(g,f) = a_n^m g(a_1) g(a_2) ... g(a_n)$.

13) Яке з тверджень вірне?

а) $R(g,f) = (-1)^{mn} R(f,g)$;

б) $R(g,f) = (-1)^{m} R(f,g)$;

в) $R(f,g) = (-1)^{mn} R(g,f)$;

г) $R(g,f) = (-1)^{n} R(f,g)$.

14) Для того, щоб многочлени $f(x)$ і $g(x)$ мали спільний корінь необхідно і достатньо, щоб …:

а) $R(f,g) = 1$;

б) $D(f,g) = 1$;

в) $D(f,g) = 0$;

г) $R(f,g) = 0$.

15) Дискримінант многочлена – це вираз виду:

а) $D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{-1} R(f, f')$;

б) $D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{-1} R(f', f)$;

в) $D(f) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a_n^{-1} R(f, f')$;

г) $D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{-1} R(f, f'')$.

16) Для того, щоб многочлен $f(x)$ мав кратний корінь необхідно, щоб:

а) $D(f)=1$;

б) $R(f, f'')=1$;

в) $D(f)=0$;

г) $R(f, f')=1$.

17) Скільки членів може мати канонічна форма однорідного многочлена другого степеня від двох змінних?

а) 1;

б) 2;

в) 3;

г) від 1 до 3.

18) Скільки членів може мати канонічна форма однорідного многочлена третього степеня від трьох змінних?

а) 3;

б) від 1 до 9;

в) від 1 до 10;

г) від 1 до 6.

19) Серед наступних одночленів вказати ті, які не можуть бути вищим членом многочлена.

а) $x_1^4 x_2^2 x_3$;

б) $x_1^2 x_2^3 x_3$;

в) $x_2^2 x_3^2 x_4^2$;

г) $x_1^4 x_3^2 x_4$.

20) Многочлен $f(x_1,...,x_n)$ називається …, якщо внаслідок довільної перестановки змінних $x_1,...,x_n$ утворюється многочлен, рівний даному.

а) зведеним відносно змінних $x_1,...,x_n$;

б) симетричним відносно змінних $x_1,...,x_n$;

в) звідним відносно змінних $x_1,...,x_n$;

г) однорідним відносно змінних $x_1,...,x_n$.

21) Якщо $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$ є вищим членом симетричного многочлена, то:

а) $k_1 > k_2 > ... > k_n$;

б) $k_1 < k_2 < ... < k_n$;

в) $k_1 \le k_2 \le ... \le k_n$;

г) $k_1 \ge k_2 \ge ... \ge k_n$.

22) Що утворює множина всіх симетричних многочленів від n змінних над полем P відносно дій додавання і множення?

а) кільце з 1;

б) поле з 1;

в) групу з 1;

г) область цілісності з 1.

23) Як позначається такий елементарний симетричний многочлен $x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n$?

а) σ_3;

б) σ_2;

в) σ_1;

г) σ_0.

24) Чи вірно, що $S_3 = x^3 + y^3 + z^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3$?

а) так;

б) ні;

в) якщо дописати σ_3^2;

г) якщо із запису вилучити σ_3.

25) Чи можна будь-який симетричний многочлен від n змінних подати у вигляді многочленів від основних симетричних функцій $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$?

а) так;

б) ні;

в) залежить від вибору σ_i;

г) залежить від початкового многочлена.

26) **Задача 1.** Знайти всі дійсні розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} x+3xy+y=3+10\sqrt{2}; \\ x^2+y^2=11. \end{cases}$$

а) $(x,y)\in\left\{\left(3;\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{2};3\right)\right\}$;

б) $(x,y)\in\left\{\left(-3;\sqrt{2}\right),\left(3;-\sqrt{2}\right)\right\}$;

в) $(x,y)\in\left\{\left(3;\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2};-3\right)\right\}$.

27) **Задача 2.** Обчислити при яких раціональних значеннях λ многочлени $f(x)=2x^2+\lambda x-3$ і $g(x)=\lambda x^2+x-2$ мають спільний корінь.

а) якщо $\lambda=1$, то $x=0$;

б) якщо $\lambda=0$, то $x=0$;

в) якщо $\lambda=1$, то $x=1$.

28) **Задача 3.** Знайти цілі значення λ, при яких многочлен $f(x)=x^4-4x+\lambda$ має кратні корені.

а) $\lambda=3, x=1$;

б) $\lambda=1, x=1$;

в) $\lambda=1, x=3$.

ТЕСТ 3. Многочлени над різними полями

1) Кожен многочлен, степінь якого більша за 1 є … у полі C.
   а) незвідним;
   б) звідним;
   в) зведеним;
   г) примітивним.
2) Скільки коренів має многочлен n–го степеня над полем C?
   а) рівно $n-1$;
   б) рівно n;
   в) рівно $n+1$;
   г) не менше n.
3) Який вигляд має дискримінант кубічного рівняння $x^3+px+q=0$?
   а) $D=\dfrac{q^2}{4}-\dfrac{p^3}{27}$;
   б) $D=\dfrac{q^3}{4}+\dfrac{p^2}{27}$;
   в) $D=\dfrac{q^3}{4}-\dfrac{p^2}{27}$;
   г) $D=\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}$.
4) При якій умові кубічне рівняння має один дійсний корінь і два комплексних спряжених кореня?
   а) $D>0$;
   б) $D<0$;
   в) $D=0$;
   г) $D\neq 0$.
5) При якій умові кубічне рівняння має три дійсних корені (два з яких рівні)?
   а) $D>0$;
   б) $D<0$;
   в) $D=0$;
   г) $D\neq 0$.

6) При якій умові кубічне рівняння має три різних дійсних кореня?
   а) $D>0$;
   б) $D<0$;
   в) $D=0$;
   г) $D\neq 0$.
7) Довільний многочлен ненульового степеня з комплексними коефіцієнтами має хоча б один … корінь (основна теорема теорії многочленів).
   а) цілий;
   б) раціональний;
   в) дійсний;
   г) комплексний.
8) Якщо комплексне число z_0 – є коренем многочлена $f\left(z\right)$ з дійсними коефіцієнтами, то спряжене комплексне число $\overline{z}_0$:
   а) не є коренем цього многочлена;
   б) є коренем цього ж многочлена;
   в) є коренем многочлена з протилежними знаками;
   г) є коренем многочлена з коефіцієнтами, оберненими до даних.
9) Якщо комплексне число z_0 – є коренем k-ї кратності многочлена $f\left(z\right)$ з дійсними коефіцієнтами, то спряжене комплексне число $\overline{z}_0$ є коренем …:
   а) $\left(k-1\right)$-ї кратності;
   б) $\left(k+1\right)$-ї кратності;
   в) k-ї кратності;
   г) нульової кратності.
10) Всі дійсні корені рівняння $f\left(z\right)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$ містяться в інтервалі $\left(-N_0;N_0\right)$, де $N_0=1+\dfrac{A}{\left|a_n\right|}$ і ...:
   а) $A=\max\left\{\left|a_n\right|,\left|a_{n-1}\right|,...,\left|a_0\right|\right\}$;

б) $A = \min\{|a_n|, |a_{n-1}|, ..., |a_0|\}$;

в) $A = \max\{|a_{n-1}|, ..., |a_0|\}$;

г) $A = \min\{|a_{n-1}|, ..., |a_0|\}$.

11) Щоб відокремити дійсні корені многочлена $f(x)$ необхідно знайти інтервали, в яких …:
   а) не лежить жодного кореня;
   б) лежить один корінь;
   в) лежать два кореня;
   г) лежать всі корені.

12) Якщо x, зростаючи, проходить через корінь якої-небудь проміжної функції ряду, але не проходить через корінь $f(x)$, то число змін знаків у ряді Штурма при цьому …:
   а) не зміниться;
   б) зросте на 1;
   в) зменшиться на 1.

13) Якщо a і b $(a < b)$ – довільні дійсні числа, які не є коренями $f(x)$, то число p дійсних коренів многочлена $f(x)$ в інтервалі $(a;b)$ дорівнює …, де $s(a)$ і $s(b)$ є число змін знаків у ряді Штурма відповідно у точках a і b.
   а) $p = s(b) - s(a)$;
   б) $p = s(b) + s(a)$;
   в) $p = s(a) + s(b)$;
   г) $p = s(a) - s(b)$.

14) Яким є поле розкладу многочлена $f(x) = x^2 - 9$?
   а) Z;
   б) Q;
   в) R;
   г) C.

15) Яким є поле розкладу многочлена $f(x) = x^4 - 1$?

а) Z;
б) Q;
в) R;
г) C.

16) Яким є поле розкладу многочлена $f(x) = x^2 - 5$?

а) Z;
б) Q;
в) R;
г) C.

17) Корінь многочлена $f(x) = 4x^5 + 2ix^4 - (4-5i)x^3 + 6x - 3$:

а) $1-i$;
б) 3;
в) $2+i$;
г) $1-3i$.

18) Чи є звідним над полем C многочлен $f(x) = x^2 + i$?

а) так;
б) ні;
в) при певному x;
г) можливо.

19) Яке максимальне число змін знаків може мати многочлен n-го степеня:

а) $n-1$;
б) n;
в) $n+1$;
г) $n!$.

20) Для того, щоб дріб $\frac{p}{q}$, де $(p,q)=1$, був коренем рівняння з цілими коефіцієнтами $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ необхідно, щоб p … , а q … .

а) p було дільником вільного члена, а q було дільником старшого коефіцієнта;
б) p було дільником старшого коефіцієнта, а q було дільником вільного члена;

в) p було дільником вільного члена, а q не було дільником старшого коефіцієнта;

г) p не було дільником вільного члена, а q було дільником старшого коефіцієнта.

21) Для того, щоб дріб $\frac{p}{q}$, де $(p,q)=1$ був раціональним коренем многочлена з цілими коефіцієнтами $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$, необхідно, щоб при довільному цілому k число $f(k)$ ділилося на …:

а) $p-qk$, де $p-qk\neq 0$;

б) $q-pk$, де $q-pk\neq 0$;

в) $p-qk$, де $p-qk=0$;

г) $q-pk$, де $q-pk=0$;

22) Якщо в многочлені з цілими коефіцієнтами $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$ коефіцієнти a_i діляться на деяке просте число p, причому a_0 …, а старший коефіцієнт a_n …, то многочлен $f(x)$ незвідний у полі раціональних чисел.

а) a_0 не ділиться на p; a_n не ділиться на p;

б) a_0 не ділиться на p^2; a_n не ділиться на p;

в) a_0 не ділиться на p; a_n не ділиться на p^2;

г) a_0 не ділиться на p^2; a_n не ділиться на p^2.

23) Многочлени $f(x)$ і $g(x)$ з кільця $Q[x]$ є взаємно простими. Чи можуть вони мати спільний комплексний корінь $a+bi,\ b\neq 0$?

а) так;

б) ні;

в) при певному a;

г) при певному b.

24) Чи може незвідний у кільці $Q[x]$ многочлен мати кратні комплексні корені $a+bi,\ b\neq 0$?

а) так;
б) ні;
в) при певному a;
г) при певному b.

25) Нехай є многочлен $x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$. Яка заміна приводить до многочлена виду $x^3+px+q=0$?

а) $x=y-\dfrac{a_1}{3}$;

б) $x=y+\dfrac{a_1}{3}$;

в) $x=y+\dfrac{a_2}{3}$;

г) $x=y-\dfrac{a_2}{3}$.

26) Якщо x, зростаючи, проходить через корінь многочлена $f(x)$, то число змін знаків у ряді Штурма …:

а) не зміниться;
б) зменшиться на 1;
в) збільшиться на 1.

27) **<u>Задача 1.</u>** Знайти многочлен найменшого степеня, в якого число $2+i$ є трикратним коренем, –5 – двократним, а 3 є простим коренем.

а) $f(x)=(x-2+i)^3(x-3)(x+5)$;

б) $f(x)=(x-2+i)^3(x-3)(x-5)$;

в) $f(x)=(x-2+i)^3(x-3)(x+5)^2$;

г) $f(x)=(x-2-i)^3(x-3)(x+5)$.

28) **<u>Задача 2.</u>** Знайти суму квадратів коренів многочлена $f(x)=x^3-(1+2i)x^2-3$.

а) $-3+4i$;

б) $3+4i$;

в) $-3-4i$.

29) **<u>Задача 3.</u>** Розв'язати рівняння $x^3-6x+4=0$.

а) $\left\{2;\ \pm\sqrt{3}\right\}$;

б) $\left\{2;\ -1\pm\sqrt{3}\right\}$;

в) $\left\{2;\ 1+\sqrt{3}\right\}$.

30) **<u>Задача 4.</u>** Відокремити дійсні корені многочлена $f\left(x\right)=x^3+6x-2$.

а) один комплексний корінь в інтервалі $\left(0;\ 1\right)$;

б) два дійсних кореня в інтервалі $\left(0;\ 1\right)$;

в) один дійсний корінь в інтервалі $\left(0;\ 1\right)$.

31) **<u>Задача 5.</u>** Знайти всі раціональні корені многочлена $f\left(x\right)=6x^4+19x^3-7x^2-26x+12$.

а) $-3;\ \frac{1}{2}$;

б) $-3;\ -\frac{1}{2}$;

в) раціональних коренів немає.

ТЕСТ 4. Алгебраїчні розширення

1) Розширення F поля P називається ..., якщо в полі P існує така лінійно незалежна відносно поля P система елементів $\alpha_1,...,\alpha_n$, що будь-який елемент $G \in P$ є лінійною комбінацією цих елементів з коефіцієнтами з поля P .
   а) нескінченим;
   б) алгебраїчним;
   в) скінченим;
   г) трансцендентним.
2) Розширення F є складним розширенням поля P , якщо існує такий ланцюжок розширень $P_1 = P(\alpha_1),\ P_2 = P_1(\alpha_2),...,$ $P_k = P_{k-1}(\alpha_1)$, для яких …:
   а) $P \subseteq P_1 \subseteq ... \subseteq P_k = F$;
   б) $P \supseteq P_1 \supseteq ... \supseteq P_k = F$;
   в) $P \subset P_1 \subset ... \subset P_k = F$;
   г) $P \supset P_1 \supset ... \supset P_k = F$.
3) Які з чисел є алгебраїчними?
   а) $\sqrt[3]{5}$;
   б) $1+\pi$;
   в) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{5}$;
   г) $\dfrac{1+2i}{1-i}$.
4) Говорять, що множина A є зчисленою, якщо існує взаємно однозначне відображення множини A на множину всіх натуральних чисел N . Чи є множина всіх алгебраїчних чисел зчисленою?
   а) так;
   б) ні;
   в) за певних умов.

5) Нехай α – алгебраїчне число, β – трансцендентне число і n – натуральне число. Які з цих чисел алгебраїчні?
   а) α^n;
   б) $\sqrt[n]{\alpha}$;
   в) β^n;
   г) $\sqrt[n]{\beta}$.
6) Яким числом є сума довільного раціонального і трансцендентного чисел?
   а) раціональним;
   б) алгебраїчним;
   в) дійсним;
   г) трансцендентним.
7) Яку алгебраїчну структуру відносно операції додавання і множення утворюють алгебраїчні числа?
   а) групу;
   б) кільце;
   в) поле;
   г) тіло.
8) Нехай поле P є алгебраїчним розширенням поля Q степеня 10. Якого степеня алгебраїчні числа містяться в полі P?
   а) 1;
   б) 2;
   в) 5;
   г) 10;
   д) всі перераховані.
9) Нехай поле P є алгебраїчним розширенням поля Q степеня 10. Чи містяться в полі P окремі трансцендентні числа?
   а) так;
   б) ні;
   в) лише одне.
10) Якщо число α – алгебраїчне відносно поля P, то в кільці $P[x]$ існує єдиний зведений многочлен $f(x)$, що $f(\alpha)=0$ і степінь n є найменшим серед степенів усіх многочленів з коренем α. Як називається такий многочлен?

а) звідний;
б) мінімальний;
в) симетричний;
г) асоційований.

11) Мінімальне розширення поля P, яке містить число $\alpha \notin P$, називається …, утвореним приєднанням числа α:
а) складним розширенням поля P;
б) максимальним розширенням поля P;
в) простим розширенням поля P;
г) алгебраїчним розширенням поля P;

12) Якщо α є алгебраїчним відносно поля P, то $P(\alpha)$ називається … .
а) простим алгебраїчним розширенням поля P;
б) складним алгебраїчним розширенням поля P;
в) простим трансцендентним розширенням поля P;
г) складним трансцендентним розширенням поля P.

13) Чи вірно, що кожне складне алгебраїчне розширення поля P є простим розширенням цього поля?
а) так;
б) ні;
в) за певних умов.

14) Нехай $\alpha \neq 0$ – алгебраїчне число. Яким буде число α^{-1}, обернене до α?
а) дійсне;
б) алгебраїчне;
в) трансцендентне;
г) комплексне.

15) **Задача 1.** Довести, що число $\alpha = \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$ – алгебраїчне і знайти його мінімальний многочлен.
а) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 1$;
б) $f(x) = x^6 - 4x^3 + 1$;
в) $f(x) = x^6 + 4x^3 + 1$;
г) $f(x) = x^6 - 4x^2 + 1$.

16) **<u>Задача 2.</u>** Позбавитись від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{1}{\omega^2-\omega+2}$, де ω – корінь рівняння $\omega^4-5=0$.

а) $\frac{1}{4}\left(2\omega^3-3\omega^2+4\omega-7\right)$;

б) $-\frac{1}{4}\left(2\omega^3-3\omega^2+4\omega-7\right)$;

в) $\frac{1}{4}\left(2\omega^3-3\omega^2+4\omega+7\right)$;

г) $-\frac{1}{4}\left(2\omega^3+3\omega^2+4\omega-7\right)$.

ПІДСУМКОВИЙ ТЕСТ. Теорія многочленів

1) Вираз виду $f(x)=a_n x^x + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$, де

   n – ____,

   $a_n,\ldots,a_1,a_0$ – ____,

   $a_n x^n$ – ____,

   називається ____________________ над ______________________.

2) Степінь многочлена позначається _________ і канонічна форма многочлена це – ____________________________________

   ____.

3) Алгебраїчна рівність многочленів –

   ____

   ____,

   а функціональна –

   ____

   ____.

4) Якщо многочлени рівні алгебраїчно, то вони рівні і

   ____.

   Чи справедливе обернене твердження?

   ____.

5) Властивості подільності многочленів:

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____.

6) Сформулювати теорему $f(x)=g(x)s(x)+r(x)$:

   ____

   ____

   ____.

7) Якщо $f(x)\,\vdots\,(x-a)$, то

   а) a – ____,

   б) $f(a)$ – ____.

в) $(f,g)=$ ____.

г) $[f,g]=$ ____.

8) Якщо $(f,g)=1$, то ____.

9) Заповнити пусті місця: $(f,g)=f(x)\cdot$______+ $g(x)$ ______,
де ____.

10) Многочлен $f(x)$ з $P[x]$ називається незвідним у полі $P[x]$, якщо ____
____.

11) Властивості незвідних многочленів: ________________________
____
____
____
____.

12) Якщо $f(x)\vdots(x-a)^k$ і $f(x)\not\vdots(x-a)^{k+1}$, то
____
____.

13) Теорема Кронекера: ____
____
____
____.

14) Поле розкладу многочлена – це ________________________________
____
____
____.

15) Для того, щоб α був коренем кратності k многочлена $f(x)$ необхідно і достатньо, щоб ________________________________
____
____
____.

16) Нехай

	1	–6	10	–6	9
3	1	–3	1	–3	0
3	1	0	1	0	

Що можна сказати про число $\alpha = 3$? Чому рівна остача від ділення многочлена $f(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9$ на $(x-3)^3$? ____.

17) Раціональний дріб $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ називається правильним, якщо

____.

Навести приклади правильного дробу:

____.

18) Елементарний дріб – це ________________________________

____.

19) Якщо $(q_1(x),\ q_2(x)) = 1$, то $\dfrac{f(x)}{q_1(x)\cdot q_2(x)} =$ ________________,

де ____.

20) Кожен правильний дріб виду $\dfrac{f(x)}{(g(x))^k}$, де $f(x)$ – __________

_____________________, $g(x)$ – __________________________

можна подати у вигляді _________________________________

____.

21) Многочлен $f(x,y,z) = x^5y^2z^3 - 2y^2z^4 + 5x^4y^4 - 3x^3y^4z$ є многочленом від __________ змінних. Його вищий член __________, степінь ___________, лексикографічний запис

____.

22) Многочлен називається однорідним, якщо _________________

____.

Приклад:____.

23) Многочлен $f(x_1,...,x_n)$ є симетричним, якщо _______________

____.

Приклади симетричних многочленів: _______________________

____.

Приклади несиметричних многочленів: _____________________

____.

24) Властивості симетричних многочленів:

____

____

____

____.

25) Елементарні симетричні многочлени – це
а) для 2 змінних __________________________________

____,

б) для 3 змінних __________________________________

____.

26) Основна теорема симетричних многочленів:______________

____

____.

27) Степеневу суму третього порядку від двох змінних представити через основні симетричні многочлени: _________

____.

28) Теорема Вієта:_________________________________

____

____.

29) $R(f,g)=a_n^m g(\alpha_1)\cdot$ __________ $\cdot\, g(\alpha_n)$, де $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ –

____

Заповнити пропущені місця. Про що йде мова:____________

____.

30) Якщо $R(f,g)=0$, то ________________________________

____.

31) $D(f)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_n^{-1}R(\_\_,\_\_)$. Заповнити пропущені місця.

32) Якщо $D(f)=0$, то

____

____.

33) Многочлен третього степеня над полем R має:
а) принаймні один дійсний корінь;
б) два дійсних і один комплексний корені.

Підкреслити правильну відповідь. Чи існують інші варіанти? Якщо так, то вказати їх:

____

____.

34) Будь-який многочлен ненульового степеня з комплексними коефіцієнтами має ____

____.

35) Многочлен n -го степеня у полі C має _____________________

____.

36) Якщо $x = 2 - i$ є коренем $f(x) = x^4 - x^3 - 11x^2 + 31x - 20$, то і $x =$ ______________________.Сформулювати теорему на основі якої було зроблено висновок. ______________________________

____.

37) Що можна сказати про звідність довільного многочлена над R, степінь якого перевищує 2? ______________________________

____.

А якщо степінь дорівнює ?______________________________

____.

38) Всі дійсні корені многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ містяться в інтервалі: ________________, де __________________

____.

39) Правило Декарта: ____________________________________

____

____.

40) Що означає відокремити дійсні корені многочлена: _________

____.

41) Як утворюється ряд Штурма: ______________________________

____

____.

42) Властивості ряду Штурма: _________________________________

____

____

____

____.

43) Теорема Штурма: ____
____
____
____.

Щоб число $\frac{p}{q}$, де p – це ______________________________,
q – це ____
було коренем рівняння з цілими коефіцієнтами, необхідно
____.

Чи є ця умова достатньою?
____.

44) Для того, щоб $f(x)$ з цілими коефіцієнтами був звідним у полі Q необхідно і достатньо, щоб ________________________
____.

45) Критерій Ейзенштейна: ______________________________
____
____.

46) Число α є алгебраїчним , якщо ________________________
______________________________________, а трансцендентним –
____.

47) Мінімальний многочлен – це многочлен, що задовольняє умови:____
____
____
____.

СПИСОК ОСНОВНИХ ПОНЯТЬ

А

Алгебраїчна рівність многочленів: рівними називаються многочлени $f(x)$ і $g(x)$ (позначають $f(x)=g(x)$), якщо їх канонічні форми збігаються, тобто мають однакові степені і попарно рівні відповідні коефіцієнти.

Алгебраїчно замкнуте поле – поле P, якщо воно є полем розкладу для будь–якого многочлена $f(x)\in P[x]$ ненульового степеня.

Алгоритм Евкліда – алгоритм для знаходження найбільшого спільного дільника двох многочленів $f(x)$ і $g(x)$, причому $\deg f(x)\geq \deg g(x)$. Виконаємо послідовне ділення з остачею: $f(x)=g(x)s_1(x)+r_1(x)$, $g(x)=r_1(x)s_2(x)+r_2(x)$, $r_1(x)=r_2(x)s_3(x)+r_3(x)$, ..., $r_{n-2}(x)=r_{n-1}(x)s_n(x)+r_n(x)$, $r_{n-1}(x)=r_n(x)s_{n+1}(x)$. Остання, відмінна від нуля, остача $r_n(x)$ у цій системі рівностей і є НСД многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

Асоційовані многочленами в кільці P_n – многочлени, які відрізняються множником, який є відмінною від нуля константою: $f(x)=cg(x)$ або $\mathrm{g(x)}=\frac{1}{c}\cdot f(x)=c^{-1}\cdot f(x)$.

В

Взаємно простими називаються многочлени $f(x), g(x)\in P[x]$, якщо їх спільний дільник є многочленом нульового степеня: $(f(x), g(x))=1$.

Відокремленням цілої частини називається зображення неправильного дробу у вигляді $\frac{f(x)}{g(x)}=s(x)+\frac{f_1(x)}{g(x)}$.

Вільним (нульовим) членом многочлена $f(x)=a_n x^x+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x+a_0$ називається елемент a_0.

Д

Дискримінантом $D(f)$ **многочлена** $f(x)$ називається вираз виду $D(f)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_n^{-1}R(f,f')$, де $R(f,f')$ – результант $f(x)$ і його похідної $f'(x)$.

Дискримінантом рівняння $x^3+px+q=0$ називають число $D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$.

Многочлен $f(x)\in P[x]$ **ділиться націло** на $g(x)\in P[x]$ (записується $f(x)\vdots g(x)$), якщо остача $r(x)$ при діленні $f(x)$ на $g(x)$ дорівнює нулю, тобто якщо існує многочлен $s(x)\in P[x]$ такий, що $f(x)=g(x)s(x)$.

Добутком многочленів $f(x)$ і $g(x)$ називають многочлен $p(x)=c_{n+m}x^{n+m}+c_{n+m-1}x^{n+m-1}+\ldots+c_1x+c_0$,

де $c_k=\sum\limits_{j=0}^{k}a_{k-j}b_j=a_kb_0+a_{k-1}b_1+\ldots+a_1b_{k-1}+a_0b_k$ $(k=0,1,\ldots,n+m)$ або

$c_k=\sum\limits_{i+j=k}a_ib_j$, $a_{k-j}=0$ при $\mathrm{k-j>0, b_j=0}$ при $\mathrm{j>m}$, тобто

$p(x)=f(x)\cdot g(x)$.

Е

Елементарним дробом у полі P називається раціональний дріб виду $\frac{f(x)}{(g(x))^k}$, де $g(x)$ – незвідний многочлен у полі P, $f(x)\in P[x]$ і $\deg f(x)\le \deg g(x)$, а k – будь–яке натуральне число.

З

Звідним (складеним) у полі P називається **многочлен** $f(x)\in P[x]$, якщо $\deg f(x)\ge 1$ і в кільці $P[x]$ існують многочлени $f(x)$ і $g(x)$, такі, що $f(x)=g(x)s(x)$, причому $\deg g(x)\geq 1$ і $\deg s(x)\geq 1$.

Звідним у полі Р називається **многочлен** $g\in P_n$, якщо $\deg g\geq 1$ і $\underset{U,V\in P_n}{\exists}\left(g=UV\wedge \deg U\geq 1\wedge \deg V\geq 1\right)$.

Значенням многочлена $f(x)$ при $x=\alpha$ називається вираз $f(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+...+a_1\alpha+a_0$ з кільця R, якщо многочлен $f(x)\in R[x]$ має канонічну форму і $\alpha\in R[x]$.

І

Інтерполяційним многочленом Лагранжа називають многочлен $f(x)=\sum_{i=1}^{n+1}\beta_i\,\dfrac{(x-\alpha_1)...(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})...(x-\alpha_{n+1})}{(\alpha_i-\alpha_1)...(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})...(\alpha_i-\alpha_{n+1})}$, де коефіцієнти $c_0,\,c_1,\,...,\,c_n$ визначаються послідовною підстановкою значень $x=\alpha_1, x=\alpha_2,..., x=\alpha_{n+1}$.

Інтерполяційним многочленом Ньютона називають многочлен $f(x)=c_0+c_1(x-\alpha_1)+...+c_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)$.

К

Канонічним розкладом многочлена $f(x)$ у полі $P[x]$ називається зображення $f(x)=(p_1(x))^{k_1}(p_2(x))^{k_2}...(p_m(x))^{k_m}$, де $p_k(x)$ – попарно різні (неасоційовні) многочлени, незвідні у полі P[x]. Це зображення єдине з точністю до сталих множників і їх нумерації.

Канонічною формою многочлена $f(x)$ називається упорядкування його членів за спаданням степеня x^k.

Кільцем многочленів $R[x_1,...,x_n]$ **від** n **змінних** $x_1,...,x_n$ над областю цілісності R називається кільце многочленів від однієї змінної x_n над кільцем $R[x_1,...,x_n]$, тобто $R[x_1,...,x_n]=R[x_1,...,x_{n-1}][x_n]$.

Коефіцієнтом члена $a_i x_1^{K_{1i}} x_2^{K_{2i}} ... x_n^{K_{ni}}$ **многочлена** $f = \sum_{i=1}^{m} a_i x_1^{k_{1i}} x_2^{k_{2i}} ... x_n^{k_{ni}}$ називається відповідний елемент $a_i \in R$.

Константами називають многочлени нульового степеня, позначають $\theta(x) = 0$.

Коренем многочлена $f(x) \in P[x]$ називається елемент α будь–якого розширення поля P такий, що $f(\alpha) = 0$.

Коренем многочлена $f(x) \in P[x]$ називається елемент $\alpha \in P$, якщо $f(x)$ ділиться на $x - \alpha$.

Коренем многочлена $f(x)$ називається число α, якщо $f(\alpha) = 0$.

Кратними множниками кратності k_j **многочлена** $f(x)$ буде многочлен $p_j(x)$, що входить у канонічний розклад $f(x) = (p_1(x))^{k_1} (p_2(x))^{k_2} ... (p_m(x))^{k_m}$ у степені з показником k_j.

Кратними множниками многочлена називаються множники, кратність яких більша за 1.

Кратні корені – корені, кратність яких більша за 1.

k–кратним коренем (або коренем k–ї кратності) називається елемент $\alpha \in$ Р многочлена $f(x) \in P[x]$, якщо $f(x)$ ділиться на $(x - \alpha)^k$, але не ділиться на $(x - \alpha)^{k+1}$.

***k*–тим членом** або **членом *k*–го степеня** многочлена $f(x) = a_n x^x + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ називається вираз $a_k x^k$ ($k = \overline{1, n}$).

Л

Лексикографічним записом многочлена називається відношення "бути вищим" на множині членів многочленів, що є лінійним строгим порядком. Нехай $a x_1^{K_1} x_2^{K_2} ... x_n^{K_n}$ і $b x_1^{L_1} x_2^{L_2} ... x_n^{L_n}$ – два члени многочлена $f(x_1, ..., x_n)$. Вважається, що перший елемент вищий від другого, якщо $K_1 = L_1, K_2 = L_2, ..., K_{i-1} = L_{i-1}, K_i > L_i$. Позначають $a x_1^{K_1} x_2^{K_2} ... x_n^{K_n} \succ b x_1^{L_1} x_2^{L_2} ... x_n^{L_n}$.

Лінійним представленням НСД двох многочленів $f(x), g(x) \in P[x]$ – це запис виду $d(x) = f(x)U(x) + g(x)V(x)$, де $U(x)$ і $V(x)$ – деякі многочлени з $P[x]$, $d(x)$ – найбільший спільний дільник.

М

Метод Ньютона – один з методів знаходження меж дійсних коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами.

Многочленом (поліномом) від однієї змінної над областю цілісності R називається вираз виду $f(x) = a_n x^x + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, де n – довільне ціле невід'ємне число, $a_n, ..., a_1, a_0$ – елементи R, $x, x^2, ..., x^n$ – деякі символи, x^k – k–ий степінь змінної x, a_k – k–ий коефіцієнт многочлена або коефіцієнт при x^k ($k = \overline{1, n}$).

Многочленом від n **змінних над** R називається кожний елемент кільця $R[x_1, ..., x_n]$ і позначається $f(x_1, ..., x_n)$.

Множником кратності k_j **многочлена** $f(x)$ називається многочлен $p_j(x)$, що входить у канонічний розклад $f(x) = (p_1(x))^{k_1} (p_2(x))^{k_2} ... (p_m(x))^{k_m}$ у степені з показником k_j.

Н

Найбільшим спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$ називається їх спільний дільник, який ділиться на кожен інший спільний дільник $f(x)$ і $g(x)$. Позначається $(f(x), g(x))$.

Найменшим спільним кратним многочленів $f(x)$ і $g(x)$ називається їх спільне кратне, на яке ділиться кожне спільне кратне цих многочленів. Позначається $[f(x), g(x)]$.

Незвідним (нерозкладним, простим) називається многочлен $f(x) \in P[x]$ у полі P, якщо він не є константа і не має дільників, відмінних від константи і від многочлена виду $c \cdot f(x)$, де c – константа.

Незвідним у полі *P* називається многочлен $p \in P_n$, якщо $\deg p \geq 1$ і $\underset{U,V \in P_n}{\forall} \left(p = UV \Rightarrow \deg U = 0 \vee \deg V = 0 \right)$.

Неправильним називається раціональний дріб $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, якщо степінь $f(x)$ більша за степінь $g(x)$.

Нуль–многочленом над *R* називають елемент $\theta \in R$, який вважають константою та многочленом, і позначаємо $\theta(x)$.

О

Область цілісності – комутативне кільце, в якому не існує дільників нуля.

Однорідним називається многочлена, у якого всі члени мають однаковий степінь.

П

Подібними називаються два члени, які відрізняються тільки коефіцієнтами.

Поле розкладу многочлена $f(x)$ – поле L, в якому многочлен розкладається на лінійні множники.

Похідною від многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in$ називається многочлен $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) x_{n-1} a^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1$.

Правильним називається раціональний дріб $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, якщо степінь многочлена $f(x)$ менша за степінь многочлена $g(x)$, в іншому разі дріб – **неправильний**.

Примітивним (відносно S) називається многочлен $f(x) \in S[x]$, $f(x) \neq 0$, якщо НСД його коефіцієнтів дорівнює одиниці.

Примітивним називається многочлен $p(x)$ з цілими коефіцієнтами, якщо його коефіцієнти не мають спільних дільників, відмінних від ± 1.

Прості корені – корені кратності 1.

Р

Раціональним дробом над P називається кожний елемент поля раціональних дробів $P(x)$.

Результантом многочленів $f(x)$ і $g(x)$ називається вираз виду $R(f, g) = a_n^m g(a_1) g(\alpha_2) \ldots g(\alpha_n)$, де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – корені многочлена $f(x)$.

Розкладом многочлена $f(x)$ називається зображення $f(x) = p_1(x) p_2(x) \ldots p_l(x)$ многочлена на незвідні множники у полі $P[x]$.

Розкласти многочлен $f(x)$ **за степенями** $x - \alpha$ означає представити його у вигляді:
$f(x) = c_n (x - \alpha)^n + c_{n-1} (x - \alpha)^{n-1} + c_1 (x - \alpha) + c_0$.

С

Симетричним відносно змінних $x_1, \ldots, x_n$ називається многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$, якщо внаслідок довільної перестановки змінних $x_1, \ldots, x_n$ утворюється многочлен рівний даному.

Спільним дільником $f(x)$ і $g(x)$ називається многочлен $d(x)$, який є дільником многочлена $f(x)$ і многочлена $g(x)$.

Спільним кратним многочленів $f(x), g(x) \in P[x]$ називають будь–який многочлен $s(x) \in P[x]$ такий, що $s(x) \vdots f(x) \wedge s(x) \vdots g(x)$.

Старшим членом називається відмінний від нуля член многочлена $f(x)$, степінь якого більший за степінь усіх інших відмінних від нуля членів цього многочлена, його коефіцієнт називається **старшим коефіцієнтом**, а його степінь – **степенем многочлена** $f(x)$.

Степенем члена $ax_1^{K_1}x_2^{K_2}...x_n^{K_n}$ **многочлена** називається сума $K_1 + K_2 + ... + K_n$. Число K_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ називається **степенем даного члена відносно** x_i. Найбільший із степенів членів називається **степенем многочлена**, а член з найбільшим степенем – **старшим членом многочлена**.

Сумою многочленів $f(x)$ і $g(x)$ називають многочлен

$$s(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_{m+1}x^{m+1} + (a_m + b_m)x^m +$$

$$+(a_{m-1} + b_{m-1})x^{m-1} + ... + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0),$$

тобто $s(x) = f(x) + g(x)$ $(n \geq m \geq 0)$.

Ф

Функціональна рівність многочленів: якщо область цілісності R має характеристику 0, то многочлени $f(x), g(x) \in R[x]$ рівні між собою тоді і тільки тоді, коли рівні функції φ_f і φ_g, які вони визначають.

Формулою Кардано називається формула, за якою знаходяться корені рівняння $x^3 + px + q = 0$:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}.$$

Ч

Членом многочлена $f(x_1, ..., x_n)$ називається кожен доданок $a_i x_1^{K_{1i}} x_2^{K_{2i}} ... x_n^{K_{ni}}$ в сумі $f = \sum_{i=1}^{m} a_i x_1^{k_{1i}} x_2^{k_{2i}} ... x_n^{k_{ni}}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра и теорія чисел: Практикум. Ч.2. / [Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пілаєв В.В., Рокицький І.О.] К.: Вища школа. Головне видавництво, 1986. 264 с.
2. Бородін О.І. Теорія чисел / Бородін О.І. К.: Вища школа. Головне видавництво, 1970. 274 с.
3. Завало С.Т. Алгебра і теорія чисел. Ч.2 / Завало С.Т., Костарчук В.Н, Хацет В.И. К.: Вища школа. Головне видавництво, 1977. 384 с.

Навчально-методичне видання

Ходаковська Олена Олександрівна
Атамась Володимир Васильович
Кацімон Оксана Василівна
Фай ВікторіяСтепанівна

ТЕОРІЯ МНОГОЧЛЕНІВ

Частина III

Навчально-методичний посібник

Комп'ютерний набір та верстання –
О. О. Ходаковська

Підписано до друку . Формат 60×84/16
Ум. друк. арк. 1,45. Тираж 300 пр. Зам. №___

Виготовлено з оригіналу-макету
У Черкаському національному університеті
імені Богдана Хмельницького
Адреса: бульвар Шевченка, 81, м. Черкаси, Україна, 18031
Тел. (0472) 37–13–16, факс (0472) 35–44–63
e–mail: vydav@cdu.edu.ua, http://www.cdu.edu.ua
Свідоцтво про внесення до державного реєстру
суб'єктів видавничої справи ДК №3427 від 17.03.2009 р.