

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЧЕРКАСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ БОГДАНА ХМЕЛЬНИЦЬКОГО

**О. О. Ходаковська, В. В. Атамась**

# **ТЕОРІЯ МНОГОЧЛЕНІВ**

**Частина II**

**Навчально–методичний посібник**

Черкаси – 2020

УДК  
ББК  
Х 69

***Рецензенти:***

**В. С. Ковтуненко** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри фундаментальних дисциплін та прикладного матеріалознавства Черкаського державного технологічного університету

**В. І. Слинько** – доктор фізико-математичних наук, професор з кафедри алгебри і математичного аналізу Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького

*Рекомендовано до друку Вченою радою Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького  
(протокол № )*

**Ходаковська О.О., Атамась В.В.**

Х 69 Теорія многочленів. Частина II: Навчально-методичний посібник / [О. О. Ходаковська, В. В. Атамась]. – Черкаси: ЧНУ імені Богдана Хмельницького, 2020. – 64 с.

ISBN

Матеріал посібника призначений для ефективної самостійної роботи студентів вищих навчальних закладів стаціонарної та заочної форми навчання та підготовки їх до занять.

Посібник містить питання для самоконтролю та задачі для самостійного розв'язування по темах «Многочлени від однієї змінної», «Многочлени від кількох змінних», «Многочлени над числовими полями». До кожної задачі подано відповідь. Розділ «Цікаві задачі» містить задачі на доведення та нестандартні задачі з теорії многочленів.

УДК  
ББК

ISBN

© ЧНУ ім. Б.Хмельницького, 2020

© О.О. Ходаковська, В.В. Атамась, 2020

## ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	5
РОЗДІЛ I. МНОГОЧЛЕНИ ВІД ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.....	6
1.1. Кільце многочленів над областю цілісності.....	6
1.2. Теорія подільності многочленів. НСД і НСК многочленів.....	8
1.3. Незвідні многочлени.....	10
1.4. Корені многочленів. Похідна від многочлена. Відокремлення кратних множників.....	11
1.5. Поле раціональних дробів.....	13
РОЗДІЛ II. МНОГОЧЛЕНИ ВІД КІЛЬКОХ ЗМІННИХ.....	16
2.1. Кільце многочленів від кількох змінних.....	16
2.2. Симетричні многочлени.....	18
2.3. Результат та дискримінант двох многочленів.....	19
РОЗДІЛ III. МНОГОЧЛЕНИ НАД ЧИСЛОВИМИ ПОЛЯМИ...	21
3.1. Многочлени над полем комплексних чисел.....	21
3.2. Многочлени над полем дійсних чисел.....	22
3.3. Рівняння третього степеня.....	23
3.4. Відокремлення дійсних коренів многочленів. Теорема Штурма.....	25
3.5. Многочлени над полем раціональних чисел. Критерій незвідності Ейзенштейна.....	26
РОЗДІЛ IV. ЦІКАВІ ЗАДАЧІ.....	29
4.1. Задачі на доведення.....	29
4.2. Нестандартні задачі.....	37
4.3. Задачі для самостійного розв'язання.....	43

ВІДПОВІДІ.....	45
СПИСОК ОСНОВНИХ ПОНЯТЬ.....	55
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	63

## ПЕРЕДМОВА

Курс «Теорія многочленів» за навчальними програмами вищих навчальних закладів входить як розділ до курсу «Вища математика». Вивчення курсу передбачає розширення і поглиблення знань студентів по темі «Многочлени» з шкільного курсу математики.

Даний навчально–методичний посібник містить питання для самоконтролю та задачі для самостійного розв’язуванн по темах «Многочлени від однієї змінної», «Многочлени від кількох змінних», «Многочлени над числовими полями». До кожної задачі подано відповідь. Розділ «Цікаві задачі» містить задачі на доведення та нестандартні задачі з теорії многочленів.

Матеріал посібника допоможе студентам вищих навчальних закладів, які вивчають курс «Лінійна алгебра», «Аналітична геометрія та лінійна алгебра», «Вища математика» в організації самостійної роботи та підготовці до занять.

Навчальний посібник містить словник основних понять та означень многочленів, що значно полегшує самостійну роботу студентів.

# РОЗДІЛ І. МНОГОЧЛЕНИ ВІД ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

## 1.1. Кільце многочленів над областю цілісності

### *Питання для самоконтролю:*

- 1) Многочлен – це ...
- 2) Старший коефіцієнт многочлена – це ... ,  
старший член многочлена – це ... ,  
ступінь многочлена – це ... .
- 3) Чи є такий запис многочлена його канонічною формою.  
Відповідь пояснити.
  - а)  $f(x) = ax^2 + bx^3 + cx$
  - б)  $g(x) = x^5 + x^4 + 1$
  - в)  $h(x) = x + 2x^3 + 4x^5$
- 4) Канонічне представлення многочлена єдине чи ні?
- 5) Чому рівний степінь суми та добутку многочлена?
- 6) Що означають записи  $f(a)$  і  $f'(a) = 0$
- 7) В чому полягає функціональна рівність многочленів?
- 8) Яка умова алгебраїчної рівності многочленів?
- 9) Чи вірно, що коли многочлени рівні між собою функціонально, то вони рівні і алгебраїчно?
- 10) Асоційовані многочлени – це ...
- 11) Що означає запис:  $f(x) = g(x)s(x) + r(x)$

### *Задачі:*

- 1) Знайти канонічну форму многочлена:
  - а)  $f(x) = (x - \bar{3})^2$  в кільці  $Z_4[x]$ ;
  - б)  $f(x) = (\bar{4}x^3 + \bar{2}x^2 - \bar{3}x + \bar{1})(x^2 - \bar{2}x + \bar{3})$  у кільці  $Z_5[x]$ .
- 2) Виконати ділення з остачею („кутом”):
  - а) многочлена  $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$  на многочлен  $g(x) = x^2 - 3x + 1$ ;

б) многочлена  $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$  на многочлен  $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$ .

3) Використовуючи схему Горнера поділити в кільці  $Z[x]$  многочлен  $f(x)$  на лінійний двочлен  $x - \alpha$ :

а)  $f(x) = x^4 - 3x^3 + x - 1$ ,  $\alpha = 2$ ;

б)  $f(x) = 9x^3 + 8x^2 - 10x$ ,  $\alpha = -3$ .

4) При якій умові многочлен  $f(x) = x^3 + px + q$  ділиться на многочлен  $g(x) = x^2 + mx - 1$ .

5) При яких значеннях  $a, b, c$  многочлени  $f(x)$  і  $g(x)$  з кільця  $Z[x]$  рівні між собою:  $f(x) = ax(x^2 + 3) + bx(x - 1) + c(x + 1)$ ,  $g(x) = 2x^3 + 5x^2 + 8x + 7$ .

6) Довести, що з функціональної точки зору ці многочлени рівні:  $f(x) = x^{10} + \bar{4}x^2$ ,  $g(x) = \bar{4}x^5 + x$  з кільця  $Z_5[x]$ .

7) Знайти всі значення  $a$  при яких многочлен  $f(x)$  є квадратом деякого многочлена  $g(x)$  з кільця  $Z[x]$ . Записати  $g(x)$ .  
 $f(x) = 9x^4 - 12x^3 + 16x^2 - 8x + a$ .

8) Знайти суму коефіцієнтів многочленна  $f(x) = (1 + 3x - 5x^3)^{1983} \cdot (2 - 7x + 6x^5)^{2003}$  в кільці  $Z[x]$ .

9) Знайти необхідну і достатню умову подільності многочленів  $f(x) = x^4 + bx^2 + c$  на  $g(x) = x^2 + ax + 1$  в кільці  $Z[x]$ .

10) Знайти остачу від ділення  $f(x) = x^{100} + x^{99} - 2x^{98} - 3x^3 + 2x + 5$  на  $g(x) = x^2 + x - 2$  в кільці  $Z[x]$ .

11) При діленні многочлена  $f(x)$  на  $g(x)$  в кільці  $Z[x]$  дістали остачу  $r(x) = 3x^2 - 4x + 1$ . Знайти остачу від ділення  $(f(x))^2$  на  $g(x)$ , якщо  $\deg g = 5$ .

- 12) При діленні многочлена  $f(x)$  на  $g(x)$  в кільці  $R[x]$  дістали остачу 3, а при діленні  $(f(x))^2$  на  $(g(x))^2$  - остачу 9. Яка буде остача, якщо  $f(x)$  поділити на  $(g(x))^2$ ?
- 13) При діленні многочлена  $f(x)$  на  $g(x)$  у кільці  $C[x]$  дістали частку  $q(x) = ix + 3 - 2i$  та остачу  $r(x) = (-1 + i)x^2 + 2$ . Знайти остачу від ділення  $f(x)$  на  $q(x)$ .

## 1.2. Теорія подільності многочленів. НСД і НСК многочленів

### *Питання для самоконтролю:*

- 1) Сформулювати теорему Безу і наслідок з неї.
- 2) Що означає розкласти многочлен за степенями  $(x - \alpha)$ ?
- 3) Який дільник є спільним для многочленів?
- 4) Спільний дільник називається найбільшим спільним дільником многочленів, якщо...
- 5) Взаємно прості многочлени – це...
- 8) Що означає лінійно представити найбільший спільний дільник?
- 9) При якій умові  $f(x)$  і  $g(x)$  взаємно прості?
- 10) Алгоритм Евкліда. Для чого його використовують?
- 11) Спільне кратне многочленів  $f(x)$  і  $g(x)$  - це ...
- 12) Що називається НСК многочленів і як його обчислити?

### *Задачі:*

- 1) Знайти частку і остачу від ділення многочлена  $f(x) = x^3 - x^2 - x$  на многочлен  $g(x) = x - 1 + 2i$ .
- 2) Знайти значення многочлена  $f(x)$  з кільця  $K[x]$  в точці  $x = x_0$ , якщо:

а)  $f(x) = x^5(1+2i)^4 - (1+3i)x^2 + 7$ ,  $x_0 = -2-i$ ,  $K = C$ ;

б)  $f(x) = x^5 + x^4 + \bar{3}x^3 + 1$ ,  $x_0 = \bar{3}$ ,  $K = Z_5[x]$ ;

в)  $f(x) = 2x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 5$ ,  $\alpha = -\frac{1}{2}$ ;

г)  $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$ ,  $\alpha = 4$ .

3) Методом невизначених коефіцієнтів знайти частку і остачу від ділення  $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x$  на  $g(x) = x + 3$ .

4) Остачі від ділення многочлена  $f(x)$  з кільця  $Z_5[x]$  на  $g_1(x) = x + \bar{1}$ ,  $g_2(x) = x - \bar{2}$ ,  $g_3(x) = x + \bar{2}$  відповідно дорівнюють  $\bar{1}$ ,  $\bar{2}$ ,  $\bar{4}$ . Знайти остачу від ділення цього многочлена на  $g(x) = x^3 + x^2 - \bar{4}x + \bar{1}$ .

5) При діленні многочлена  $f(x)$  на  $g_1(x) = x + 1$ ,  $g_2(x) = x - 1$ ,  $g_3(x) = x + 3$  отримали остачі 5, -4, 6 відповідно. Знайдіть остачу при діленні многочлена  $f(x)$  на  $g(x) = (x^2 - 1)(x + 3)$ .

6) Знайти остачу від ділення многочлена  $f(x) = x^{243} + x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x + 1$  на двочлени :

а)  $g(x) = x^2 - 1$ ;

б)  $g(x) = x^2 + 1$ ;

в)  $g(x) = x^4 - 1$ .

7) Користуючись схемою Горнера розкласти многочлен  $f(x)$  за степенями двочлена  $g(x) = x - \alpha$ , якщо

а)  $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90$ ,  $\alpha = 2$ ;

б)  $f(x) = x^5$ ,  $\alpha = 1$ ;

в)  $f(x) = x^4 - (3-8i)x^3 - (21+18i)x^2 - (33-20i)x + 7+18i$ ,  $\alpha = -1+2i$ .

- 8) Довести, що многочлен  $f(x) = (x + \alpha)^n - x^n - \alpha^n$  ділиться:
- на  $g(x) = x$  над областю цілісності  $K$  з одиницею;
  - на  $g(x) = x + \alpha$  в кільці  $Z_2[x]$ .
- 9) Користуючись алгоритмом Евкліда, знайти найбільший спільний дільник таких многочленів:
- $f(x) = x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5$ ,  
 $g(x) = x^5 + x^2 - x + 1$ ;
  - $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$ ,  $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ ;
  - $f(x) = x^4 + 2ix^3 - 2x^2 - 2ix + 1$ ,  $g(x) = x^3 + (i+1)x^2 + ix$ .
- 10) Знайти найменше спільне кратне таких многочленів :
- $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$ ,  $g(x) = 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$ ;
  - $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x + 2$ ,  $g(x) = x^3 + 3x + 2$ ;
  - $f(x) = x^4 + 2ix^3 - 2x^2 - 2ix + 1$ ,  $g(x) = x^3 + (i+1)x^2 + ix$ .
- 11) Визначити многочлени  $u(x)$  і  $v(x)$  так, щоб для многочленів  $f(x)$  і  $g(x)$  виконувалася рівність  $f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot v(x) = (f, g)$ , якщо
- $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$ ,  $g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$ ;
  - $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$ ,  $g(x) = x^2 - x - 1$ .

### 1.3. Незвідні многочлени

#### *Питання для самоконтролю:*

- Який многочлен називається незвідним у полі  $P$  ?
- Звідний многочлен у полі  $P$  – це ...
- Чи вірно, що многочлени першого степеня над будь-яким полем  $P[x]$  є незвідними у кільці  $P[x]$  ?

- 4) Нехай  $P_k(x)$  - незвідні многочлени у полі  $P[x]$ . Як називається такий запис:  $f(x) = p_1(x)p_2(x) \cdot \dots \cdot p_l(x)$  ?
- 5) Канонічним розкладом многочлена називається ...
- 6) Властивості незвідних многочленів: ...

### *Задачі:*

- 1) Встановити чи звідні над полем  $Q$  такі многочлени :
- a)  $f(x) = x^2 - 10x + 21$ ,
- b)  $g(x) = 2x^2 - 3x - 5$ ,
- c)  $h(x) = 2x + 6$ .
- 2) Розкласти на незвідні множники многочлен  $f(x) = 2x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2$  в полях  $Q$ ,  $R$ ,  $C$ , якщо він має дві пари коренів у полі, які є протилежними числами.
- 3) Розкласти на незвідні у полі  $P$  множники такі многочлени:
- a)  $f(x) = x^4 - 2x^3 - 27x^2 - 44x + 7$ ,  $P = Q$ ;
- b)  $f(x) = x^4 + 1$ ,  $P = C$ ;
- c)  $f(x) = x^3 + 6x^2 - 8x + 12$ ,  $P = Q$ ;
- d)  $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 5x + 2$ ,  $P = Q$ .
- 4) Знайти многочлен шостого степеня  $f(x)$  з кільця  $Z_3[x]$ , якщо  $f'(x) = \bar{2}x + \bar{1}$  і  $f(\bar{1}) = 1$ .

## **1.4. Корені многочленів. Похідна від многочлена. Відокремлення кратних множників**

### *Питання для самоконтролю:*

- 1) Які множники називаються кратними?
- 2) Яка кратність множника  $(x-3)$  у канонічному розкладі многочлена  $f(x) = x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 81x + 54$  ?

- 3) Якщо многочлени  $f(x)$  і  $g(x)$  розкладені на незвідні множники у полі  $P$ , то чому рівний НСД цих многочленів?
- 4) Коренем кратності  $k$  називається ...
- 5) Число коренів многочлена над полем  $P$  рівне ...
- 6) Що називається полем розкладу многочлена?
- 7) Сформулюйте теорему Вієта.
- 8) Похідна многочлена  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  дорівнює:...
- 9) Чи вірно, що  $\deg f'(x) = \deg(f) - 1$ ?
- 10) Необхідна і достатня умова, щоб многочлен мав кратний корінь ...

### **Задачі:**

- 1) Розкласти многочлен  $f(x)$  за степенями двочлена  $g(x) = x - \alpha$  і знайти  $f'(\alpha), f''(\alpha), f'''(\alpha), f^{IV}(\alpha)$ , якщо:
  - a)  $f(x) = x^5 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1$  і  $\alpha = -i$ ,
  - b)  $f(x) = \bar{4}x^5 + \bar{10}x^3 - x + \bar{2}$  належить  $Z_{11}[x]$  і  $\alpha = \bar{3}$ .
- 2) Знайти кратність  $k$  кореня  $\alpha$  многочлена  $f(x)$ :
  - a)  $f(x) = x^5 - 7x^3 - 2x^2 + 12x + 8$ ,  $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = -1$ ,
  - b)  $f(x) = x^4 - (1 - 3i)x^3 - (3 + 3i)x^2 + (3 - i)x + i$ ,  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -i$ .
- 3) При яких значеннях  $\lambda$  многочлен  $f(x) \in R[x]$  має кратний корінь:  $f(x) = x^3 - 3x + \lambda$ .
- 4) Визначити коефіцієнт  $a$  так, щоб многочлен  $f(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$  мав число  $-1$  коренем не нижче другої кратності.
- 5) Відокремити кратні множники таких многочленів:
  - a)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ ,
  - b)  $f(x) = x^5 - 15x^3 - 10x^2 + 60x + 72$ .

- 6) Визначити коефіцієнт  $a$  так, щоб один з коренів многочлена  $f(x) = x^3 - 21x + a$  був рівним подвійному другому.
- 7) Знайти многочлен третього степеня, якщо його корені рівні  $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2$ , де  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – корені многочлена  $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 6x + 10$ .

## 1.5. Поле раціональних дробів

### *Питання для самоконтролю:*

- 1) Який раціональний дріб називається правильним?
- 2) Елементарний дріб у полі  $P[x]$  - це ...
- 3) Чи є елементарний дріб правильним?
- 4) Чи вірно, що  $\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ , якщо  $g_1(x)$  і  $g_2(x)$  - взаємно прості многочлени? Відповідь пояснити.
- 5) Як можна представити правильний дріб  $\frac{f(x)}{(g(x))^k}$ , де  $g(x)$  - многочлен незвідний над полем  $P$ ?
- 6) Чи єдиний розклад правильного дробу  $\frac{f(x)}{g(x)}$  на елементарні дробу у даному полі. Відповідь пояснити

### *Задачі:*

- 1) Довести тотожність:
 
$$\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} = 1.$$
- 2) Використовуючи інтерполяційну формулу Ньютона, побудувати многочлен найменшого степеня  $f(x) \in \mathcal{Q}[x]$  за такою таблицею:

а)

$x$	-3	-2	-1
$f(x)$	1	2	4

б)

$x$	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	5	0	3	2

3) Знайти многочлен найменшого степеня  $f(x) \in Q[x]$  за такою таблицею:

а) Обчислити  $f(2i)$  і  $f(0)$ .

$x$	1	$i$	-1	$-i$
$f(x)$	$i$	1	$-i$	-1

б) Обчислити  $f(0)$  і  $f(5)$ .

$x$	1	2	3	4
$f(x)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

4) Знайти цілі числа  $a, b, c$  такі, що

а) 
$$\frac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3};$$

б) 
$$\frac{3x^3 + 9x^2 - 44x - 24}{(x+1)(x+2)} = ax + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$

5) У полі  $R[x]$  знайти нескоротний дріб, який дорівнює:

а) 
$$\frac{3x^2 - x - 2}{x^6 - 1},$$

б) 
$$\frac{x^2 - x - 1}{x^3 - x^2 - x - 2}.$$

б) Перевірити, чи є раціональні дроби  $\frac{f(x)}{g(x)}$  елементарними над полем  $P$ , якщо:

$$\text{a) } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 2} \text{ i } P = Q,$$

$$\text{b) } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3 - 1}{(x^3 + 3)^2} \text{ i } P = Q,$$

$$\text{c) } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x^2 + x + 1} \text{ i } P = R.$$

7) Розкласти дріб на елементарні дробби:

$$\text{a) } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)},$$

$$\text{b) } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{(x^4 - 1)}.$$

8) Розкласти дріб на елементарні дробби:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x - 1}{x(x+1)^2(x^2 + x + 1)}.$$

9) Розкласти дріб на елементарні дробби в полі комплексних

чисел: 
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3 + x}{(x-1)(x^2 + 1)}.$$

10) Розкласти дріб на елементарні дробби в полі раціональних

чисел: 
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x^3 + x}.$$

## РОЗДІЛ II. МНОГОЧЛЕНИ ВІД КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

### 2.1. Кільце многочленів від кількох змінних

#### *Питання для самоконтролю:*

- 1) Многочленом від  $n$  змінних над полем  $P$  називається ...
- 2) Наведіть приклади многочлена від трьох змінних.
- 3) Що є степенем члена  $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$  ?
- 4) Степінь многочлена – це ..., старшим членом многочлена називають ...
- 5) Чому дорівнює степінь добутку двох многочленів?
- 6) Що означає відношення „бути вищим”?
- 7) Чи є такий запис многочлена  $f(x) = x_1^2x_2^3 + x_1x_2^2 + x_1^4x_2$  лексикографічним? Відповідь пояснити.
- 8) Який многочлен від  $n$  змінних називається звідним (незвідним) у полі  $P$  ?
- 9) Назвіть властивості незвідних многочленів?
- 10) Чи можливо подати многочлен  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  не нульового степеня над полем  $P$  у вигляді добутку незвідних у полі  $P$  многочленів?
- 11) Примітивний многочлен – це ...
- 12) Дати означення симетричного многочлена відносно змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$  многочленна.
- 13) Сформулювати основну теорему теорії симетричних многочленів.
- 14) Назвіть властивості симетричних многочленів.

#### *Задачі:*

- 1) Знайти канонічну форму таких многочленів:
  - a)  $f(x, y) = (x - y)^2(x^2 + xy + y^2)(x + 2y) + x^2 - 1$ ,
  - b)  $f(x, y, z) = (x - y)(y - z)(x - z)xyz$ .

2) Упорядкувати лексикографічно і знайти вищий член многочлена:

a)  $f(x_1x_2x_3) = \frac{1}{2}x_2x_3^2 - 3\frac{1}{4}x_1x_2x_3 + x_2x_3 + 2x_1^2x_2 + 3x_1x_2,$

b)  $f(x, y, z, t) = (x + y)(z + y) + \bar{2}x(y + t + \bar{1}) + (y + t)^3$  з кільця  $Z_3[x, y, z, t]$ .

3) Застосовуючи заміну  $x = ty$  розкласти на незвідні у полі  $P$  множники многочлен  $f(x, y)$ , якщо

a)  $f(x, y) = 4x^4 + 4x^3y + 13x^2y^2 + 6xy^3 + 9y^4$  і  $P = Q,$

b)  $f(x, y) = x^4 + \bar{4}y^4$  і  $P = Z_5.$

4) Розкласти на незвідні множники многочлен  $f(x, y) \in Q[x, y]:$

a)  $f(x, y) = -x^3 + 2x^2y + xy^2 + 6y^3,$

b)  $f(x, y) = x^4 + x^3y - 3x^2y^2 - 5xy^3 - 2y^4.$

5) Чи є симетричними такі многочлени:

a)  $f(x, y, z) = 2x^3 + 2y^3 + 2z^3 + xyz - 1,$

b)  $f(x, y, z, t) = (xy + zt)(xt + yz)(xz + yt),$

c)  $f(x, y, z) = (x - y)(y - z)(z - x).$

6) Виразити через елементарні симетричні многочлени:

$$f(x, y) = 2x^4y - 5x^2y + 2xy^4 - 5xy^2.$$

7) Перевірити вірність даної рівності:

$$S_4 = x^4 + y^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2.$$

8) Виразити через елементарні симетричні многочлени:

a)  $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz,$

b)  $f(x, y, z) = (x + y)(x + z)(y + z),$

c)  $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2.$

## 2.2. Симетричні многочлени

### Задачі:

1) У множині дійсних чисел розв'язати системи:

$$\text{a) } \begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x + y = 5; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y + z = 6, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ x^3 - y^3 + z^3 = 36. \end{cases}$$

2) Розв'язати систему ірраціональних рівнянь: 
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5. \end{cases}$$

3) Розв'язати системи рівнянь, звівши їх за допомогою допоміжних змінних до симетричних многочленів:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y = 2, \\ x^3 - y^3 = 8; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + y = 5, \\ x^6 + y^3 = 65. \end{cases}$$

4) Розв'язати такі рівняння:

$$\text{a) } x + \sqrt{17 - x^2} + x\sqrt{17 - x^2} = 9,$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{10 - x} - \sqrt[3]{3 - x} = 1.$$

5) Скоротити дріб

$$\frac{f(x, y, z)}{g(x, y, z)} = \frac{yz - x^2 + xz - y^2 + xy - z^2}{x(yz - x^2) + y(xz - y^2) + z(xy - z^2)}.$$

6) Скласти квадратне рівняння, коренями якого є куби коренів рівняння  $x^2 + 6x + 10 = 0$ .

7) Скласти квадратне рівняння, коренями якого є  $a$  і  $b$ , якщо відомо, що  $a^5 + b^5 = 31$ ,  $a + b = 1$ .

8) Знайти многочлен третього степеня, коренями якого є:

а) куби комплексних коренів многочлена  $f(x) = x^3 - x - 1$ ;

б) четверті степеня комплексних коренів многочлена  $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2$ .

9) Знайти многочлен четвертого степеня, коренями якого є:

а) квадрати комплексних коренів многочлена

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x + 3;$$

б) кубі комплексних коренів многочлена  $f(x) = x^4 - x - 1$ .

10) Довести такі тотожності:

$$а) x^4 + y^4 + (x + y)^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2,$$

$$б) (x + y)^3 + 3xy(1 - x - y) - 1 = (x + y - 1)(x^2 + y^2 - xy + x + y + 1).$$

11) Довести, що коли  $x + y + z = 0$ , то

$$2(x^4 + y^4 + z^4) = (x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

12) Розкласти на незвідні над полем  $\mathbb{R}$  множники симетричний однорідний многочлен

$$f(x, y) = 2x^4 + 7x^3y + 9x^2y^2 + 7xy^3 + 2y^3.$$

### 2.3. Результант та дискримінант двох многочленів

#### *Питання для самоконтролю:*

- 1) Що називається результатом?
- 2) Назвіть властивості результанту.
- 3) Щоб многочлени  $f(x)$  і  $g(x)$  мали спільний корінь  
необхідною і достатньою умовою є ...
- 4) Як записується результат у формі Сільвестра?
- 5) Якщо  $R(f, g) = 0$ , то ...
- 6) Дискримінант двох многочленів - це ...
- 7) Умова існування кратного кореня.
- 8) Який алгоритм виключення невідомих з системи рівнянь:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

#### *Задачі:*

- 1) Обчислити результат многочленів:
  - а) використовуючи означення;
  - б) використовуючи симетричні многочлени;

в) у формі Сільвестра.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1 \quad \text{і} \quad g(x) = 2x^2 - x - 1.$$

2) При якому значенні  $\lambda$  мають спільні корені слідуючі многочлени:

а)  $f(x) = x^3 - \lambda x + 2$  і  $g(x) = x^2 + \lambda x + 2$ ,

б)  $f(x) = x^3 + \lambda x^2 + 2$  і  $g(x) = x^3 + 2\lambda x - 1$ .

3) Обчислити дискримінант многочленів:

а)  $f(x) = x^3 - 6ix + 4 - 4i$ ,

б)  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

4) Довести, що дискримінант многочлена  $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$  дорівнює дискримінанту многочлена

$$g(x) = 8x^3 - 4ax^2 - 8cx - (b^2 - 4ac).$$

5) При якому значенні  $\lambda$  многочлен має кратний корінь:

а)  $f(x) = x^3 - 3x + \lambda$ ,

б)  $f(x) = x^3 - 8x^2 + (13 - \lambda)x - (6 + 2\lambda)$ .

6) Розв'язати системи рівнянь:

а) 
$$\begin{cases} x^2 - 5y^3 + 2 = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 7 = 0; \end{cases}$$

б) 
$$\begin{cases} 5x^2 - 6xy + (5y^2 - 16) = 0, \\ 2x^2 + (y+1)x - (y^2 - y - 4) = 0; \end{cases}$$

в) 
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17, \\ 6x^2 - xy - 12y^2 = 0. \end{cases}$$

## РОЗДІЛ III. МНОГОЧЛЕНИ НАД ЧИСЛОВИМИ ПОЛЯМИ

### 3.1. Многочлени над полем комплексних чисел

#### *Питання для самоконтролю:*

- 1) Яке поле  $P$  називається алгебраїчно замкненим?
- 2) Скільки дійсних і комплексних коренів має многочлен з дійсними коефіцієнтами?
- 3) Сформулюйте основну теорему теорії многочленів.
- 4) Які многочлени називаються звідними у полі комплексних чисел?
- 5) Необхідна і достатня умова незвідності многочлена у полі  $\mathbb{C}$ .
- 6) Скільки коренів має многочлен  $n$ -го степеня у полі комплексних чисел?

#### *Задачі:*

- 1) Знайти многочлен найменшого степеня, в якого:
  - а)  $1$  – подвійний корінь, а  $2, 3, 1+i$  – прості;
  - б)  $-1$  – потрійний корінь, а  $3$  і  $4$  – прості.
- 2) Знайти многочлен найменшого степеня з дійсними коефіцієнтами, якщо  $2-3i$  – його потрійний корінь.
- 3) Знайти суму квадратів коренів многочлена  
$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 1.$$
- 4) Сума двох коренів рівняння  $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$  дорівнює  $1$ .  
Визначити  $\lambda$ .
- 5) Використовуючи формули Вієта, побудувати многочлен за його коренями:
  - а)  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ ;
  - б)  $x_{1,2} = i, x_{3,4} = 1+i$ .

- 6) Знайти зведений многочлен, в якого корені задовольняють умову:  $y_1 = \frac{x_1}{x_2 x_3}$ ,  $y_2 = \frac{x_2}{x_1 x_3}$ ,  $y_3 = \frac{x_3}{x_1 x_2}$ , а  $x_1, x_2, x_3$  є коренями многочлена  $f(x) = -2x^3 + x^2 + 2x + 3$ .
- 7) Корені многочлена  $f(x)$  утворюють арифметичну прогресію. Знайти цей многочлен і його корені, якщо  $f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x + r$ .
- 8) Чи утворюють корені рівняння  $8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 = 0$  арифметичну прогресію?
- 9) Визначте  $a$  так, щоб один з коренів многочлена  $f(x) = x^3 - 21x + a$  був рівний подвоєному другому кореню.

## 3.2. Многочлени над полем дійсних чисел

### Питання для самоконтролю:

- Що можна сказати про спряжене комплексне число  $\overline{z_0}$ , якщо комплексне число  $z_0$  є коренем многочлена  $f(z) = a_n z^{n-1} + \dots + a_0$  з дійсними коефіцієнтами?
- Який многочлен є звідним у полі дійсних чисел?
- Як можна многочлен розкласти над полем дійсних чисел на незвідні множники?

### Задачі:

- Розв'язати рівняння:
  - $x^4 - x^3 + x^2 + 4x + 10 = 0$ , якщо  $x_1 = -1 + i$ ;
  - $x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 58x + 35 = 0$ , якщо  $x_1 = 2 - i$ ;
  - $x^4 + x^3 - x^2 - 10x - 12 = 0$ , якщо  $x_1 = -1 - i\sqrt{3}$ .
- Знайти нормований многочлен найменшого степеня з дійсними коефіцієнтами, що має:
  - простий корінь  $2 + i$  і двократний корінь  $1$ ;
  - простий корінь  $-1 - i$  і двократні корені  $i$  та  $1 - i$ ;

с) трикратний корінь  $2 - 3i$ .

3) Знаючи, що число  $\alpha$  є коренем многочлена  $f(x)$ , знайти інші його корені:

a)  $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2$ ,  $\alpha_1 = 1 + i$ ,

b)  $f(x) = 2x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 5$ ,  $\alpha_1 = 1 - 2i$ ,

c)  $f(x) = x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1$ ,  $\alpha_1 = i$ .

4) Розкласти многочлен  $f(x)$  на множники, незвідні над полем  $\mathbb{R}$ :

a)  $f(x) = x^2 + 2x + 3$ ,

b)  $f(x) = x^3 + x + 2$

c)  $f(x) = x^4 + 8x^3 + 8x - 1$ .

5) Яким умовам повинні задовольняти дійсні коефіцієнти многочлена:

a)  $f(x) = (3a - 1)x^2 + 2ax + 3a - 2$ , щоб він мав два різних дійсних корені;

b)  $f(x) = (2a - 1)x^2 + \left(\frac{1}{2} - 4a\right)x + 2a + 1$ , щоб він мав один дійсний корінь.

### 3.3. Рівняння третього степеня

#### *Питання для самоконтролю:*

- 1) Яке рівняння називається рівнянням третього степеня?
- 2) Рівняння  $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$  третього степеня зводиться до рівняння виду  $x^3 + px + q = 0$  за допомогою ...
- 3) Як називається вираз  $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$  ?
- 4) Як знайти корені рівняння  $x^3 + px + q = 0$  ?

- 5) Коли рівняння  $x^3 + px + q = 0$  має один дійсний і два комплексні корені спряжених?
- 6) Якщо  $D = 0$ , то які корені має рівняння  $x^3 + px + q = 0$ ?
- 7) Рівняння  $x^3 + px + q = 0$  має три дійсні корені, якщо ...
- 8)  $U_1$  і  $V_1$  – це ...
- 9) З якої умови знаходиться числа  $U_1$  і  $V_1$ ?

### *Задачі:*

- 1) Звести кубічне рівняння до виду, у якому відсутній доданок з невідомим у другому степені:
  - a)  $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$ ,
  - b)  $x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0$ ,
  - c)  $x^3 - 6ix^2 + 2x - 4 = 0$ .
- 2) Розв'язати рівняння :
  - a)  $x^3 + 9x - 26 = 0$ ,
  - b)  $x^3 - 3x + 2 = 0$ ,
  - c)  $x^3 + 3x - 2i = 0$ ,
  - d)  $3x^2 - 8x + 8 = 0$ .
- 3) При яких дійсних значеннях  $a$  рівняння  $ax^3 + (a-1)x + a - 1 = 0$  має кратний корінь? Знайти його.
- 4) Які корені залежно від значення числа  $a$  має рівняння з дійсними коефіцієнтами  $x^3 - 3x^2 - ax + 2a^2 - 3a - 4 = 0$ ?
- 5) Розв'язати рівняння  $12x^3 + 4x^2 - 17x + 6 = 0$ , коли відомо, що серед його коренів є два числа, обернених за абсолютною величиною і протилежних за знаком.
- 6) Розв'язати рівняння  $3x^3 + 2\sqrt{3}x^2 - 21x + 6\sqrt{3} = 0$ , коли відомо, що добуток двох його коренів дорівнює 1.
- 7) Розв'язати кубічне рівняння  $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ , коли відомо, що його коефіцієнти в порядку спадання степенів утворюють геометричну прогресію з знаменником 2.

### 3.4. Відокремлення дійсних коренів многочленів. Теорема Штурма

#### *Питання для самоконтролю:*

- 1) Як розташовані комплексні корені з дійсними коефіцієнтами відносно дійсної осі?
- 2) Де розміщені всі дійсні корені рівняння  
 $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ ?
- 3) Число  $M$  є верхньою межею додатних коренів многочлена  $f(x)$ , якщо ...
- 4) Кількість змін знаків деякої впорядкованої послідовності дійсних чисел  $c_1, c_2, \dots, c_m$  – це ...
- 5) Сформулюйте правило Декарта.
- 6) Яка заміна використовується для знаходження кількості від'ємних коренів многочлена  $f(x)$ ?
- 7) Щоб побудувати ряд Штурма необхідно...
- 8) Сформулювати теорему Штурма.
- 9) Чи мають дві сусідні функції ряду Штурма спільні корені?
- 10) Якщо  $\alpha$  є коренем однієї з проміжних функцій ряду Штурма, то...
- 11) Якщо  $x$ , зростаючи, проходить через корінь якої-небудь проміжної функції ряду, але не проходить через корінь  $f(x)$ , то ...
- 12) Якщо  $x$ , зростаючи, проходить через корінь многочлена  $f(x)$ , то...

#### *Задачі:*

- 1) Знайти верхню межу дійсних коренів многочлена методом Ньютона:
  - a)  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$ ,
  - b)  $f(x) = -2x^4 + 6x^3 - 7x + 3$ .

- 2) Знайти нижню межу дійсних коренів многочлена методом Ньютона:
- $f(x) = 4x^4 - 12x^2 + 8x - 1$ ,
  - $f(x) = x^5 + 6x^4 - 11x^3 - 11x^2 + 6x + 1$ .
- 3) Обмежити зверху і знизу дійсні корені многочленів:
- $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 8x + 3$ ,
  - $f(x) = x^5 + 7x^3 - 3$ .
- 4) Знайти число дійсних коренів для многочленів:
- $f(x) = x^4 + 3x^3 - 4x - 1$  на проміжку  $[0, 2]$ ,
  - $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4$  на проміжку  $[-3, 5]$ .
- 5) Відокремити дійсні корені многочленів:
- $f(x) = x^3 - 3x - 1$ ,
  - $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ ,
  - $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x + 5$ .
- 6) Оцінити за правилом Декарта число додатніх і від'ємних коренів многочлена  $f(x) = x^3 - 12x - 4$ .

### 3.5. Многочлени над полем раціональних чисел. Критерій незвідності Ейзенштейна

#### *Питання для самоконтролю:*

- Число якого виду може бути раціональним коренем многочлена?
- При якій умові число  $\frac{p}{q}$ , де  $(p, q) = 1$ , може бути коренем рівняння з цілими коефіцієнтами?
- Коли всі раціональні корені є цілими числами і являються дільниками вільного члена?
- Якщо числа  $\frac{f(1)}{p-q}$  і  $\frac{f(-1)}{p+q}$  є цілими, то  $\frac{p}{q}$  є ...

- 5) Умова звідності многочлена  $f(x)$  з цілими коефіцієнтами у полі раціональних чисел.
- 6) Якщо многочлен  $f(x)$  з раціональними коефіцієнтами, ( $\deg f > 1$ ) має хоч один раціональний корінь  $r$ , то ...
- 7) Сформулюйте критерій Ейзенштейна незвідності многочлена з цілими коефіцієнтами.

**Задачі:**

1) Розв'язати рівняння:

a)  $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = 0$ ,

b)  $24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6 = 0$ ,

c)  $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24 = 0$ ,

d)  $10x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$ .

2) Знайти раціональні корені рівняння:  $x^3 - x^2 - \frac{8}{x^3 - x^2} = 2$ .

3) Розкласти на незвідні множники дані многочлени або довести їх незвідність:

a)  $f(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 7x - 7$ ,

b)  $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 6$ .

4) Дослідити на звідність у полі  $\mathbb{Q}$  такий многочлен:

$f(x) = x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1$ .

5) Що можна сказати про звідність даного многочлена у кільці  $Z[x]$ :

a)  $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$ ;

б)  $f(x) = x^4 + 5xd^2 + 6$ ;

в)  $f(x) = x^4 - 12x^2 - 16x - 2$ ;

г)  $f(x) = x^5 + 5$ .

6) Користуючись критерієм Ейзенштейна, довести незвідність над полем  $\mathbb{Q}$  многочленів:

a)  $f(x) = 2x^5 - 15x^3 + 21x - 24;$

b)  $f(x) = 3x^6 - 20x^4 + 30x^2 - 20x + 20;$

c)  $f(x) = 4x^7 - 21x^5 + 28x^4 - 14x^2 - 35.$

## РОЗДІЛ IV. ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

### 4.1. Задачі на доведення

**Задача 1.** Довести, що якщо  $\alpha$  і  $\beta$  – корені многочлена

$f(x) = x^2 + px + 1$ , а  $\gamma$  і  $\delta$  – корені многочлена

$g(x) = x^2 + qx + 1$ , то виконується рівність

$$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + \delta)(\beta + \delta) = q^2 - p^2.$$

**Доведення.** За теоремою Вієта маємо:

$a + \beta = -p$ ,  $\alpha\beta = 1$ ,  $\gamma + \delta = -q$ ,  $\gamma\delta = 1$ . Звідси:

$$\begin{aligned}(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + \delta)(\beta + \delta) &= \\ &= (\alpha\beta - (\alpha + \beta)\gamma + \gamma^2)(\alpha\beta + (\alpha + \beta)\delta + \delta^2) = \\ &= (1 + p\gamma + \gamma^2)(1 - p\delta + \delta^2) = \\ &= (\gamma^2 + 1 + \gamma^2\delta^2 + \delta^2) + p(\gamma - \delta - \delta\gamma^2 + \gamma\delta^2) - p^2\gamma\delta = \\ &= (\gamma + \delta)^2 + p(\gamma - \delta)(1 - \delta\gamma) - p^2 = q^2 - p^2.\end{aligned}$$

**Задача 2.** Довести, що  $\forall \alpha, \beta \neq 0$  корені  $x_1, x_2, x_3$  многочлена

$\alpha x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \beta$  задовольняють рівність

$$(x_1 + x_2 + x_3) \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = -1.$$

**Доведення.** За теоремою Вієта маємо:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{\beta}{\alpha}, \quad x_1x_2x_3 = -\frac{\beta}{\alpha}. \quad \text{Тому:}$$

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + x_3) \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) &= (x_1 + x_2 + x_3) \left( \frac{x_2 x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_3}{x_1 x_2 x_3} \right) = \\ &= 1 \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot \left( -\frac{\beta}{\alpha} \right)^{-1} = -1. \end{aligned}$$

**Задача 3.** Довести, що  $\forall n \in \mathbb{Z}^+$  многочлен  $(x+1)^{2n+1} + x^{n+2}$  ділиться на многочлен  $x^2 + x + 1$ .

**Доведення.** Використаємо метод математичної індукції:

$$1. n = 0 \Rightarrow (x+1)^{2n+1} + x^{n+2} \equiv x^2 + x + 1,$$

2. припустимо, що  $(x+1)^{2n-1} + x^{n+1} : x^2 + x + 1$ , тоді:

$$\begin{aligned} (x+1)^{2n+1} + x^{n+2} &= (x+1)^2 (x+1)^{2n-1} + x \cdot x^{n+1} = \\ &= (x^2 + 2x + 1)(x+1)^{2n-1} + x \cdot x^{n+1} = \\ &= (x^2 + x + 1)(x+1)^{2n-1} + x \left( (x+1)^{2n-1} + x^{n+1} \right) : x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

**Задача 4.** Довести, що  $P(x) = \frac{1}{630}x^9 - \frac{1}{21}x^7 + \frac{13}{30}x^5 - \frac{82}{63}x^3 + \frac{32}{35}x$

при  $\forall x \in \mathbb{Z}$  набуває цілих значень.

**Доведення.** Запишемо цей многочлен у вигляді

$$P(x) = \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} (x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) \cdot$$

Оскільки серед дев'яти послідовних цілих чисел завжди знайдуться ті, що діляться націло на 2, 5, 7, 9, тому

$\forall x \in Z \prod_{i=-4}^4 (x+i): 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$  (добуток взаємно простих чисел).

Отже, многочлен  $P(x)$  набуває цілих значень.

**Задача 5.** Для заданих  $p, q \in R$  знайти всі значення, які многочлен  $P(x) = x^2 + px + q$  набуває при  $x \in [-1; 1]$ .

**Доведення.** Функція  $P(x)$  має на графіку одну точку мінімуму

$\min x_0 = -\frac{p}{2}$ . При  $x < x_0$  функція спадає, а при  $x > x_0$  - зростає.

Тому для множини  $A$  значень даної функції  $P(x)$  на  $[-1; 1]$

маємо:

якщо  $p < -2$ , то

$$x_0 > 1 \text{ і } A = [P(1), P(-1)] = [1 + p + q, 1 - p + q];$$

якщо  $-1 \leq p \leq 2$ , то

$$-1 \leq x_0 \leq 1 \text{ і } A = [P(x_0), \max\{P(1), P(-1)\}],$$

тобто  $A = [q - \frac{p^2}{4}, 1 - p + q]$ , при

$$-2 \leq p \leq 0 \text{ і } A = [q - \frac{p^2}{4}, 1 + p + q], \text{ при } 0 \leq p \leq 2; \text{ якщо } p > 2,$$

то  $x_0 < -1$  і  $A = [P(-1), P(1)] = [1 - p + q, 1 + p + q]$ .

**Задача 6.** Довести, що  $(3x^4 + 1)$  сумою трьох квадратів.

**Доведення.** Додамо і віднімемо вираз  $(2x^3 + 2x^2)$ :

$$\begin{aligned}
& 3x^3 + (2x^3 + 2x^2) - (2x^3 + 2x^2) + 1 = \\
& = (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^4 - 2x^3 + x^2) + (x^4 - 2x^2 + 1) = \\
& = (x^2 + x)^2 + (x^2 - x)^2 + (x^2 - 1)^2
\end{aligned}$$

що і треба було довести.

**Задача 7.** Довести, що якщо  $(a-1):k^m$ , то

$$(a^k - 1):k^{m+1} \quad (k, m \in N, a \in Z, k \neq 1, a \neq 1).$$

**Доведення.**

$$\begin{aligned}
a^k - 1 &= (a-1) \underbrace{(a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + a + 1)}_{k \text{ доданків}} = \\
&= (a-1) \left( (a^{k-1} - 1) + (a^{k-2} - 1) + \dots + (a-1) + k \right) = \\
&= (a-1) \left[ (a-1) (a^{k-2} + a^{k-3} + \dots + 1) + \right. \\
&\quad \left. + (a-1) (a^{k-3} + a^{k-4} + \dots + 1) + \dots + (a-1) + k \right].
\end{aligned}$$

Так як  $(a-1):k^m$ , то кожний з доданків, що стоять в квадратних дужках, включаючи  $k$ , напевно діляться на  $k$ . Отже, права частина рівності, ф одночасно й  $(a^k - 1)$ , діляться на  $k^{m+1}$ .

**Задача 8.** Довести, що корені рівняння  $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$

дійсні числа, якщо  $a, b, c \in \square$ .

**Доведення.** Після деяких перетворень маємо

$$3x^2 - 2x(a+b+c) + (ab+bc+ac) = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ac) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \\ &= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc) = \frac{1}{2}((a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2) \geq 0 \end{aligned}$$

**Задача 9.** Довести теорему: якщо  $f(x^n)$  ділиться на  $x-1$ , то

ділиться також і на  $x^n - 1$ .

**Доведення.** Якщо  $f(x^n)$  ділиться на  $x-1$ , то  $f(1) = 0$  і, отже,

$f(x)$  ділиться на  $x-1$ , звідки випливає, що  $f(x^n)$  ділиться на  $x^n - 1$ .

**Задача 10.** Довести, що многочлен третього степеня незвідний, якщо він не має раціональних коренів.

**Доведення.** Звідний многочлен третього степеня має множник першого степеня з раціональними коефіцієнтами, том він має раціональний корінь.

**Задача 11.** Знайти необхідні і достатні умови незвідності многочлена  $x^4 + px^2 + q$  з раціональними (можуть бути дробовими) коефіцієнтами.

**Доведення.** Без порушення загальності можна шукати умови, при яких  $x^4 + px^2 + q$  розкладається на множники другого степеня з раціональними коефіцієнтами, бо якщо многочлен має раціональний корінь  $x_1$ , то  $-x_1$  буде також раціональним

коренем і лінійні множники, які їм відповідають можна об'єднати.

$$\text{Нехай } x^4 + px^2 + q = (x^2 + \lambda_1 x + \mu_1)(x^2 + \lambda_2 x + \mu_2).$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

$$\text{Тоді } \lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 = 0,$$

$$\mu_1 + \lambda_1 \lambda_2 + \mu_2 = p,$$

$$\mu_1 \mu_2 = q$$

Якщо  $\lambda_1 = 0$ , то і  $\lambda_2 = 0$ . У цьому випадку для існування раціональних  $\mu_1$  і  $\mu_2$  необхідно і достатньо, щоб дискримінант  $p^2 - 4q$  був квадратом раціонального числа.

Нехай  $\lambda_1 \neq 0$ , тоді  $\lambda_2 = -\lambda_1$ ,  $\mu_2 = -\mu_1$ , і далі  $q = \mu_1^2$ ,  $2\mu_1 - p = \lambda_1^2$ . Отже для звідності многочлена  $x^4 + px^2 + q$  необхідно і достатньо виконання однієї з двох умов:

1)  $p^2 - 4q$  є квадратом раціонального числа;

2)  $q$  є квадратом раціонального числа  $\mu_1$ ,  $2\mu_1 - p$  є квадрат раціонального числа  $\lambda_1$ .

**Задача 12.** Довести, що корені многочлена  $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$  з дійсними або комплексними

коефіцієнтами не перевищують по модулю:

$$1 + \max \left| \frac{a_k}{a_0} \right|, \quad k = \overline{1, n}.$$

**Доведення.**  $f(x) = a_0 x^n \left( 1 + \frac{a_1}{a_0 x^n} + \dots + \frac{a_n}{a_0 x^n} \right)$ . Нехай

$$\max \left| \frac{a_k}{a_0} \right| = A. \text{ Тоді при}$$

$$|x| > 1 \quad |f(x)| \geq |a_0 x^n| \left[ 1 - \frac{A}{|x| - 1} \right] = |a_0 x^n| \cdot \frac{|x| - 1 - A}{|x| - 1} > 0 \text{ при}$$

$$|x| > 1 + A.$$

**Задача 13.** Довести, що якщо ряд Штурма містить многочлени всіх степенів від нульового до  $n$ -го, до число змін знаку в ряді старших коефіцієнтів многочленів Штурма дорівнюють кількості пар спряжених комплексних коефіцієнтів даного многочлена.

**Доведення.** Нехай  $f_\lambda$  і  $f_{\lambda+1}$  два сусідніх многочлена „повного” ряду Штурма. Якщо їх старші коефіцієнти мають однакові знаки, то їх значення при  $+\infty$  не утворюють зміни знаку, а значення при  $-\infty$  дають зміну знаку, так як степінь одного з многочленів парний, а степінь другого – не парний. Якщо ж старші коефіцієнти мають протилежні знаки, то значення  $f_\lambda$  і

$f_{\lambda+1}$  при  $+\infty$  дають зміну знаку, а при  $-\infty$  - не дають. Тому, позначивши через  $V_1$  та  $V_2$  число змін знаку в ряді Штурма при  $+\infty$  та  $-\infty$ , маємо, що  $V_1 + V_2 = n$ . З іншого боку,  $V_1 - V_2$  дорівнює числу  $N$  дійсних коренів многочлена. Отже,

$$V_2 = \frac{n - N}{2}, \text{ що і треба було довести.}$$

**Задача 14.** Довести, що якщо  $a, b, c$  - сторони трикутника, то корені рівняння  $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$  уявні.

**Доведення.** За умовою  $a, b$  і  $c > 0$ . Квадратне рівняння має уявні корені тоді і тільки тоді, коли його дискримінант від'ємний ( $D < 0$ ). Знайдемо його:

$$\begin{aligned} D &= (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2 + 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 - 2bc) = \\ &= ((b+c)^2 - a^2)((b-c)^2 - a^2) = (b+c+a)(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a). \end{aligned}$$

Так як сума двох сторін трикутника більша за третю, то вирази в перших трьох дужках додатні ( $b+c > a$ ,  $a+b > c \Rightarrow b-c > -a$ ), а четвертих дужках вираз від'ємний. Отже,  $D < 0$  і корені даного рівняння уявні.

## 4.2. Нестандартні задачі

**Задача 1.** Знайти всі значення  $a$ , при яких корені  $x_1, x_2, x_3$  многочлена  $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + a$  задовольняють рівність

$$(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0.$$

**Розв'язання.** Введемо заміну  $y = x - 3$ .

Тоді числа  $y_1 = x_1 - 3, y_2 = x_2 - 3, y_3 = x_3 - 3$  є коренями многочлена

$$\begin{aligned} f(y) &= (y+3)^3 - 6(y+3)^2 + a(y+3) + a = \\ &= y^3 + 3y^2 + (a-9)y + 4a - 27. \end{aligned}$$

За теоремою Вієта:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= -3, \\ y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_1 y_3 &= a - 9, \\ y_1 y_2 y_3 &= 27 - 4a. \end{aligned}$$

Справедлива тотожність:

$$\begin{aligned} y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 &= (y_1 + y_2 + y_3)^3 - \\ &\quad - 3(y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_1 y_3)(y_1 + y_2 + y_3) + 3y_1 y_2 y_3, \end{aligned}$$

з якої отримуємо необхідну і достатню умову для  $a$ :

$$0 = (-3)^3 - 3(a-9)(-3) + (27-4a) = -27 - 3a, \text{ тобто } a = -9.$$

**Задача 2.** Знайти всі многочлени  $P(x)$  з дійсними коефіцієнтами, для яких при всіх дійсних значеннях  $x$  одночасно виконуються дві нерівності:

$$P(x+1997) \leq P(x) + 1997,$$

$$P(x+1996) \geq P(x) + 1996.$$

**Розв'язання.** Розглянемо многочлен  $G(x) = P(x+1997) - P(x)$ . Він обмежений при  $\forall x \in \mathbb{R}$  числом 1997, тому  $P(x)$  - лінійний многочлен,  $P(x) = ax + b$ . Отже, має бути  $1997a \leq 1997$  і  $1996a \geq 1996$ , звідки  $a = 1$ . Тому  $P(x) = x + b$  ( $b \in \mathbb{R}$ ).

**Задача 3.** Знайти ненульові многочлени  $P(x)$  такі, що

$$P(x^2) = (P(x))^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Розв'язання.** Нехай

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$
 Припустимо, що

хоча б один з  $a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  відмінний від нуля.

Виберемо таке  $k < n$ , де  $a_k \neq 0$ . Тоді

$$P(x^2) = a_n x^{2n} + a_k x^{2k} + \dots + a_1 x^2 + a_0 = (a_n x^n + \dots + a_0)^2 = (P(x))^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при  $x^{n+k}$ , отримаємо  $0 = 2a_n a_k$ , яке протирічить умові  $a_n \neq 0$ ,  $a_k \neq 0$ . Отже,

$a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$  і  $P(x) = a_n x^n$ . За умовою

$a_n x^n = P(x^2) = (P(x))^2 = a_n^2 x^{2n}$  отримуємо, що  $a_n = 1$ . Тому

$$P(x) = x^4, x \in \mathbb{Z}^+.$$

**Задача 4.** Знайти ненульові многочлени  $P(x)$  такі, що

$$P(x^2 - 2x) = (P(x - 2))^2, x \in \mathbb{R}.$$

**Розв'язання.** Позначимо  $y = x - 1$ ,  $Q(y) = P(y - 1)$ . Тоді

маємо

$$(P(x - 2))^2 = (P(y - 1))^2 = (Q(y))^2,$$

$$P(x^2 - 2x) = P(y^2 - 1) = Q(y^2),$$

а початкова тотожність записується як  $Q(y^2) = (Q(y))^2, y \in \mathbb{R}$ ,

тобто з точністю до позначень співпадає з тотожністю з попередньої задачі. Тому  $Q(y) = y^2$  і  $P(y) = (y + 1)^n, n \in \mathbb{Z}^+$ .

**Задача 5.** Знайти всі дійсні функції  $f$  такі, що

$$f^2(x) + f(x)f(y) = x^2 + xy, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

**Розв'язання.** При  $x - y = 1$  буде

$$2f^2(1) = 2 \Rightarrow (f(1) = 1) \vee (f(1) = -1). \text{ Підставляємо тепер}$$

$x = 1$ : в першому випадку  $f(y) = y$ , в другому -

$-f(y) = y, \forall y \in R$ . Перевіркою переконуємося, що обидві функції підходять. Отже,  $f(x) = x \wedge f(x) = -x$ .

**Задача 6.** Для заданих  $p, q \in R$  знайти всі значення, які многочлен  $P(x) = x^2 + hx + q$  набуває при  $x \in [-1; 1]$ .

**Розв'язання.** Функція  $P(x)$  має на графіку одну точку мінімуму  $\min x_0 = -\frac{p}{2}$ . При  $x < x_0$  функція спадає, а при

$x > x_0$  - зростає. Тому для множини  $A$  значень даної функції  $P(x)$  на  $[-1; 1]$  маємо: якщо  $p < -2$ , то

$x_0 > 1$  і  $A = [P(1), P(-1)] = [1 + p + q, 1 - p + q]$ ; якщо

$-1 \leq p \leq 2$ , то  $-1 \leq x_0 \leq 1$  і  $A = [P(x_0), \max\{P(1), P(-1)\}]$ ,

тобто  $A = [q - \frac{p^2}{4}, 1 - p + q]$ , при  $-2 \leq p \leq 0$  і

$A = [q - \frac{p^2}{4}, 1 + p + q]$ , при  $0 \leq p \leq 2$ ; якщо  $p > 2$ , то

$x_0 < -1$  і  $A = [P(-1), P(1)] = [1 - p + q, 1 + p + q]$ .

**Задача 7.** Представити у вигляді двох квадратів многочлен

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 8.$$

**Розв'язання.**

$$\begin{aligned} 3x^2 - 5x + 8 &= 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{8}{3}\right) = 3\left(\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{8}{3} - \frac{25}{36}\right) = 3\left(\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{71}{36}\right) = \\ &= \left(x\sqrt{3} - \frac{5\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{71}{12}}\right)^2. \end{aligned}$$

**Задача 8.** Розкласти на множники многочлен  $x^{10} + x^5 + 1$ .

**Розв'язання.**

$$\begin{aligned} x^{10} + x^5 + 1 &= (x^{10} + x^9 + x^8) - (x^9 + x^8 + x^7) + (x^7 + x^6 + x^5) - \\ &- (x^6 + x^5 + x^4) + (x^5 + x^4 + x^3) - (x^3 + x^2 + x) + (x^2 + x + 1) = \\ &= (x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1) \end{aligned}$$

**Задача 9.** Скласти рівняння за його коренями  $x_1 = \frac{a}{a-b}$ ,

$$x_2 = \frac{b}{b-a}.$$

**Розв'язання.** Коефіцієнт при першому степені невідомого рівний

$$p = -(x_1 + x_2) = -\left(\frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-a}\right) = -\left(\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a-b}\right) = -\frac{a-b}{a-b} = -1.$$

Вільний член рівний  $q = x_1 x_2 = -\frac{ab}{(a-b)^2}$ .

Шукане рівняння має вигляд  $x^2 - x - \frac{ab}{(a-b)^2} = 0$ .

**Задача 10.**  $x_1$  і  $x_2$  - корені рівняння  $x^2 - ax + a - 1 = 0$ . Знайти  $a$  ( $a \in R$ ), щоб величина  $x_1^2 + x_2^2$  була мінімальною.

**Розв'язання.**

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2(a - 1) = (a - 1)^2 + 1.$$

Отриманий вираз матиме мінімальне значення при  $a = 1$ .

**Задача 11.** Розв'язати рівняння  $x^3 - 6x = 6$ .

**Розв'язання.** Заміна

$$\alpha + \beta = x, \alpha\beta = -\frac{-6}{3} = 2.$$

$$(\alpha + \beta)^3 - 6(\alpha + \beta) = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) - 6(\alpha + \beta) = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + 3(\alpha + \beta)(\alpha\beta - 2) = 6$$

$$\alpha\beta = 2 \Rightarrow \alpha\beta - 2 = 0$$

Маємо  $\alpha^3 + \beta^3 = 6$ ,  $\alpha^3\beta^3 = 8$ . Тому  $\alpha^3$  і  $\beta^3$  коефіцієнти рівняння  $z^2 - 6z + 8 = 0 \Rightarrow z_1 = 4, z_2 = 2$ .

Тоді

$$\alpha^3 = 4, \beta^3 = 2,$$

$$\alpha = \sqrt[3]{4}, \beta = \sqrt[3]{2}$$

Отже  $x = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$ .

**Задача 12.** Визначити число дійсних коренів многочлена

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) - A^2(x-a) - B^2(x-b) - C^2(x-c),$$

якщо  $a, b, c, A, B, C \in \mathbb{R}$ .

**Розв'язання.** Для цього треба знайти

$$f(a), f(-\infty), f(c), f(+\infty). \text{ Нехай}$$

$$f < b < c, f(-\infty) < 0, f(a) = B^2(b-a) + C^2(c-b) > 0,$$

$$f(c) = -A^2(c-a) - B^2(c-b), f(+\infty) > 0.$$

Отже,  $f(x)$  має дійсні корені в проміжках

$$(-\infty, a); (a, c)(c, +\infty).$$

### 4.3. Задачі для самостійного розв'язання

- 1) Знайти всі дійсні розв'язки рівняння

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8x - 4y - 4z + 14 = 0.$$

- 2) Нехай  $a$  і  $b$  два з чотирьох коренів многочлена

$$f(x) = x^4 + x^3 - 1. \text{ Довести, що } a \cdot b \text{ - корінь}$$

$$\text{многочлена } f(x) = x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1.$$

- 3) Дано  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $ax^2 + bx + c$  має два різних кореня на проміжку  $(0, 1)$ . Довести, що  $a \geq 5$ . Знайти, хоча б одну пару  $b$  і  $c$  при  $a = 5$ .

4) Знайти многочлени  $P(x)$  такі, що  $P(0) = 0$  і

$$P(x) = \frac{1}{2}(P(x+1) + P(x-1))$$

5) Знайти всі  $x \in \square$  при яких многочлен  $f(x) = 2x^2 - x - 36$  набувають значень, рівних квадратам простих чисел.

6) Довести, що дана система не має розв'язку у полі цілих

$$\text{чисел } \begin{cases} k^2 + 2l = 19, \\ l^2 + 2m = 9, \\ m^2 + 2k = 8. \end{cases}$$

7) Розкласти на множники многочлен

$$f(x) = x^4 + 5x^3 + 15x - 9.$$

8) Рівняння  $x^2 + px + q = 0$  з раціональними коефіцієнтами має корінь  $x_1 = 1 + \sqrt{3}$ . Знайти другий корінь рівняння.

9) Довести, що корені рівняння  $x^2 + 4kx - 4(k+1) = 0$  при  $\forall k$  - дійсні числа. З'ясувати знаки коренів.

10) Довести, що якщо  $x^2 = y^2 + z^2$ , то

$$x^3 - y^3 - z^3 = (x-y)(x-z)(2x+y+z).$$

11) Розв'язати рівняння  $2x^3 - 6x = -5$ .

12) Розв'язати в полі натуральних чисел  $xy = x + y$ .

# ВІДПОВІДІ

## Розділ I

### 1.1.

- a)  $f(x) = x^2 + 2x + 11$ ;  
б)  $f(x) = \bar{4}x^5 + \bar{4}x^4 + \bar{3}x^2 + \bar{4}x + \bar{3}$ .
- a)  $s(x) = 2x^2 + 3x + 11$ ,  $r(x) = 25x - 5$ .  
б)  $s(x) = \frac{3x-7}{9}$ ,  $r(x) = \frac{-26x-2}{9}$ .
- a)  $s(x) = x^3 - x^2 - 2x - 3$ ,  $r(x) = -7$ ;  
б)  $s(x) = 9x^2 - 19x + 47$ ,  $r(x) = -141$ .
- $p = -q^2 - 1$ ,  $m = q$ .
- $a = 2$ ,  $b = 5$ ,  $c = 7$ .
- $a = 4$ ,  $g_1(x) = 3x^2 - 2x + 2$ ,  $g_2(x) = -3x^2 + 2x - 2$ .
- 1.
- якщо  $a = 0$ , то  $b = c + 1$  і  $c \in \mathbb{Z}$ , якщо  $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , то  $b = 2 - a^2$  і  $c = 1$ .
- $r(x) = -7x + 11$ .
- $r_1(x) = (3x^2 - 4x + 1)^2$ .
- $r(x) = 3$ .
- $r(x) = -5 - 17i$ .

### 1.2.

- $s(x) = x^2 - 2ix - 5 - 2i$ ,  $r(x) = -9 + 8i$ .
- A)  $-1 - 46i$ ; Б)  $\bar{2}$ ; В)  $\frac{151}{16}$ ; Г) 136.
- $s(x) = 2x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 39x + 109$ ,  $r(x) = -327$ .

4.  $r(x) = -x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{3}{2}$ .
5.  $r(x) = \bar{2}x + \bar{3}$ .
6. А)  $r(x) = 6x + 1$ , Б)  $r(x) = 1$ , В)  $r(x) = 3x^3 + 3x + 1$ .
7. а)  $f(x) = (x-2)^4 - 18(x-2) + 38$ ,  
 б)  $f(x) = (x-1)^5 + 5(x-1)^4 + 10(x-1)^3 + 10(x-1)^2 + (x-1) + 1$ ,  
 в)  $f(x) = (x+1-2i)^4 - (x+1-2i)^3 + 2(x+1-2i) + 1$ .
9. а)  $(f, g) = x^3 - x + 1$ , б)  $(f, g) = 1$ , в)  $(f, g) = x^2 + (1+i)x + i$ .
10. а)  $[f, g] = x^2 + 1$ ,  
 б)  $[f, g] = f(x)g(x)$ ,  
 в)  $[f, g] = x^5 + 2ix^4 - 2x^3 - 2ix^2 + x$ .
11. а)  $-f(x) + (x+1)g(x) = x^3 + 1$ ,  
 б)  $1 = (-x-1)f(x) + (x^3 + x^2 - 3x - 2)g(x)$ ,  
 $1 = \frac{-x^2 + 3}{2}f(x) + \frac{x^4 - 2x^2 - 2}{2}g(x)$

### 1.3.

1. а)  $f(x) = (x-3)(x-7) \in Q[x]$ ,  
 б)  $(2x-5)(x+1) \in Q[x]$ , в)  $h(x)$  — незвідний над  $Q[x]$
2.  $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 2)(2x - 1) = (x^2 + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(2x - 1) =$   
 $= (x - i)(x + i)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(2x - 1)$ .
3. а)  $f(x) = (x^2 - 7x + 1)(x^2 + 5x + 7)$ ,

$$\text{b) } f(x) = \left( x - \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{2} \right) \left( x - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2} \right) \left( x + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{2} \right) \left( x + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2} \right),$$

с) незвідний,

$$\text{d) } f(x) = (3x+2)(x^2+x+1).$$

$$4. \quad f(x) = \bar{2}x^6 + x^3 + x^2 + x + \bar{2}.$$

#### 1.4.

$$1. \text{ a) } f(x) = (x+i)^5 - 5i(x+i)^4 - (3i+1)(x+i)^3 + (10i-13)(x+i)^2 + (5+22i)(x+i) + 11-i,$$

$$f'(-i) = 22i + 5,$$

$$f''(-i) = 20i - 26,$$

$$f'''(-i) = -60 - 18i,$$

$$f^{IV}(-i) = -120i,$$

$$f^V(-i) = 120,$$

$$\text{b) } f(x) = \bar{4}(x-\bar{3})^5 + \bar{5}(x-\bar{3})^4 + \bar{7}(x-\bar{3})^3 + \bar{4}(x-\bar{3})^2 + \bar{8}(x-\bar{3}) + \bar{9},$$

$$f'(\bar{3}) = \bar{8},$$

$$f''(\bar{3}) = \bar{8},$$

$$f'''(\bar{3}) = \bar{9},$$

$$f^{IV}(\bar{3}) = \bar{10},$$

$$f^V(\bar{3}) = \bar{7}.$$

$$2. \quad \text{a) } k_1 = 2, k_2 = 1, k_3 = 2, \quad \text{b) } k_1 = 1, k_2 = 3.$$

$$3. \quad \lambda = \pm 2.$$

$$4. \quad a = -5.$$

$$5. \quad \text{a) } f(x) = (x-2)^2(x+1), \quad \text{b) } f(x) = (x-3)^2(x+2)^3.$$

$$6. \quad a = \pm 18\sqrt{3}.$$

7.  $f(x) = 3x^3 + 20x^2 + 116x - 100.$

**1.5.**

2. a)  $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)(x+2) + x + 4;$

б)  $f(x) = -x^4 + 4x^3 - x^2 - 7x + 5.$

3.a)  $f(x) = i(x^2 - 1)(x - i) - (x - 1)(x - i) - x + 1 - i, f(2i) = 8, f(0) = 0.$

б)  $f(x) = \frac{1}{24}(-x^3 - 10x^2 - 35x + 50), f(0) = \frac{25}{12}, f(5) = 0.$

4. a)  $a = 3, b = -7, c = 4;$

б)  $a = 3, b = -54, c = 84.$

5. a)  $\frac{3x+2}{(x^2+x+1)(x^3+1)},$  б) даний дріб нескоротний.

6. a) так, б) ні, c) так.

7. a)  $\frac{1}{12(x-1)} - \frac{3}{4(x+2)} + \frac{9}{4(x+3)},$

б)  $-\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{i}{4(x-i)} + \frac{i}{4(x+i)}$

8.  $-\frac{1}{x} + \frac{7}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{6x+2}{x^2+x+1} - \frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}.$

9.  $-\frac{2}{x-1} + \frac{-2+i}{2(x-i)} - \frac{2+i}{2(x+i)}.$

10.  $\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$

**Розділ II**

**2.1.**

1. a)  $f(x, y) = x^5 + x^4y - 2x^3y^2 - xy^4 + 2y^5 + x^2 - 1,$

б)  $f(x, y, z) = x^3y^2z = y^3z^2x + zx^2y - xy^2z^3 - yz^2x^3 - zx^2y^3.$

2. a)  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 x_2 - 3\frac{1}{4}x_1 x_2 x_3 + 3x_1 x_2 + \frac{1}{2}x_2 x_3^2 + x_2 x_3$ ,  
 b)  $xz$  – вищий член.
3. a)  $f(x, y) = (2x^2 - xy + 3y^2)^2$ ,  
 b)  $f(x, y) = (x - y)(x + y)(x + 2y)(x + 3y)$ .
4. a)  $f(x, y) = (3y - x)(x^2 + xy + y^2)$ ,  
 b)  $f(x, y) = (x + 3)^3(x - 2y)$ .
5. a) так, b) так, c) ні.
6.  $f(x, y) = 2\sigma_1^2 \sigma_2 - 6\sigma_1 \sigma_2^2 - 5\sigma_1 \sigma_2$ .  
 a)  $f(x, y, z) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1 \sigma_2$ ,
8. b)  $f(x, y, z) = \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_3$ ,  
 c)  $f(x, y, z) = \sigma_1^4 - \sigma_1^2 \sigma_2 + 6\sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2^2$ .

## 2.2.

1. a)  $(x, y) \in \{(2, 3)(3, 2)\}$   
 b)  $(x, y, z) \in \{(1, -2, 3), (1, -3, 2), (2, -1, 3), (2, -3, 1), (3, -1, 2), (3, -2, 1)\}$ .
2.  $(x, y) \in \{(1, 64), (64, 1)\}$ .
3. a)  $(x, y) \in \{(2, 0), (0, -2)\}$ ,  
 b)  $(x, y) \in \{(2, 1), (-2, 1), (1, 4), (-1, 4)\}$
4. a)  $\{1, 4\}$ , b)  $\{2, 11\}$ .
5.  $\frac{f(x, y, z)}{g(x, y, z)} = \frac{1}{x + y + z}$ .
6.  $x^2 + 36x + 1000 = 0$ .
7.  $x^2 - x + 3 = 0$ ,  $x^2 - x - 2 = 0$ .
8.  $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$ .
9.  $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - x + 9 = 0$ .

12.  $f(x, y) = 2\sigma_1^4 - \sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_2^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_2)(2\sigma_1^2 - 7\sigma_2) =$   
 $= (x^2 + xy + y^2)(2x^2 - 5xy + 2y^2).$

### 2.3.

1. -7.

2. a)  $\lambda = 3$  i  $\lambda = -1$ , b)  $\lambda = -1$ .

3. a) 0, b)  $a(b^2 - 4ac)$ .

5. a)  $\lambda = \pm 2$ , b)  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -3$ ,  $\lambda_3 = 125$ .

6. a)  $(x, y) \in \{(\sqrt{3}, 1), (-\sqrt{3}, 1)\}$ , b)  $(x, y) \in \{(-1, 1), (1, -1), (2, 2)\}$ .

## Розділ III

### 3.1.

1. a)  $f(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)(x-1-i) = x^5 - 8 + ix^4 +$   
 $+ (24+7i)x^3 - (34+17i)x^2 + (23+17i)x - (6+6i)$

b)  $f(x) = (x+1)^3(x-3)(x-4) = x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 16x^2 + 29x + 12.$

2.  $f(x) = (x^2 - 4x + 13)^3 = x^6 - 12x^5 + 87x^4 - 376x^3 + 1131x^2 - 2028x + 2197.$

3. 23.

4.  $\lambda = -3$ .

5. a)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6,$

b)  $f(x) = 3x^4 - (6+12i)x^3 - (15-18i)x^2 + (18+6i)x - 6i$

6.  $y^3 - 6y^2 - \frac{2}{9}y - \frac{2}{3} = 0.$

7.  $f(x) = x^3 + 6x^2 + 5x - 6$ ,  $x_1 = -2$ ,  $x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{7}.$

8. Так.  $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}.$

9.  $\pm 18\sqrt{3}.$

### 3.2.

1. a)  $x_{1,2} = -1 \pm i$ ,  $x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{11}i}{2}$ ,  
b)  $x_{1,2} = 2 \pm i$ ,  $x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{2}i$ ,  
c)  $x_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{3}$ ,  $x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ .
2. a)  $f(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5$ ,  
b)  $f(x) = x^{10} - 2x^9 + 4x^8 - 4x^7 + 9x^6 - 10x^5 + 18x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 8x + 8$ ,  
c)  $f(x) = x^6 - 12x^5 + 87x^4 - 376x^3 + 1129x^2 - 2028x + 2197$ .
3. a)  $\alpha_2 = 1 - i$ ,  $\alpha_{3,4} = \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}$ ,  
b)  $\alpha_2 = 1 + 2i$ ,  $\alpha_3 = 1$ ,  $\alpha_4 = \frac{1}{2}$ ,  
c)  $\alpha_{2,3} = -i$ ,  $\alpha_4 = i$ ,  $\alpha_{5,6} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ .
4. a) незвідний,  
b)  $f(x) = (x+1)(x^2 - x + 2)$ ,  
c)  $f(x) = (x^2 + 1)(x + 4 - \sqrt{17})(x + 4 + \sqrt{17})$ .
5. a)  $a \in \left( \frac{9 - \sqrt{17}}{16}; \frac{1}{3} \right) \cup \left( \frac{1}{3}; \frac{9 + \sqrt{17}}{16} \right)$ ,  
b)  $a \in \left\{ \frac{1}{2}; \frac{17}{16} \right\}$ .

### 3.3

1. a)  $y^3 - 9y + 28 = 0$ ,

b)  $y^3 - 8y - 9 = 0$ ,

c)  $y^3 + 14y - 4 - 20i$ .

2. a)  $D = 196$ ,  $x_1 = 2 \in R$ ,  $x_{2,3} = \pm 1 \pm 2i\sqrt{3} \in R$ ,

b)  $D = 0$ ,  $x_1 = -2$ ,  $x_{2,3} = 1 \in R$ ,

c)  $x_1 = i$ ,  $x_{2,3} = \frac{\pm 3 - \sqrt{3}}{2}i$ ,

d)  $D = \frac{784}{220}$ ,  $x_1 = -2 \in R$ ,  $x_{2,3} = \mp 1 \pm \frac{i\sqrt{3}}{3} \in C$ .

3. якщо  $a = 1$ , то  $x = 0$ , якщо  $a = \frac{4}{31}$ , то  $x = -\frac{3}{2}$ .

4. якщо  $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (3; +\infty)$ ,  
то рівняння має один дійсний і два комплексних  
кореня, якщо  $a \in \{-1, 0, 3\}$ , то рівняння має три дійсних  
кореня, два з яких рівні між собою, якщо  $a \in (0; 3)$ , то  
рівняння має три різних дійсних кореня.

5.  $\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ .

6.  $\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -2\sqrt{3}$ .

7.  $\{-2, -2i, 2i\}$ .

### 3.4.

1. a)  $\frac{3}{2}$ , b) 4, розглянути многочлен  $\varphi(x) = -f(x)$ .

2. a) 1, b)  $\frac{1}{2}$ .

3. a)  $x \in (0; 3)$ , b)  $x \in (0; 1)$ .

4. a) один корінь,  
b) чотири кореня

5. a)  $f(x) = x^3 - 3x - 1,$

$$f'(x) = x^2 - 1,$$

$$F_1(x) = 2x + 1,$$

$$F_2(x) = 1,$$

три дійсні корені в інтервалах  $(-2, -1), (-1, 0), (1, 2)$

b)  $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1,$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2,$$

$$F_1(x) = 2x + 1, F_2(x) = 1,$$

три дійсні корені в інтервалах  $(-2, -1), (-1, 0), (1, 2),$

c)  $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x + 5,$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 8x + 5,$$

$$F_1(x) = 22x^2 - 22x + 5,$$

$$F_2(x) = 2x - 1,$$

$$F_4 = 1,$$

чотири дійсні корені в інтервалах  $(1, 2), (2, 3), (-1, 0), (-2, -1).$

6. один додатній корінь, від'ємних – два або жодного.

### 3.5.

1. a)  $x = 2,$

b)  $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{2}{3}, x_3 = \frac{3}{4},$

c) раціональних коренів немає,

d)  $x_1 = -\frac{1}{2}, x_{2,3} = \frac{2 \pm i}{5}.$

2.  $x_1 = -1, x_2 = 2.$

3. a)  $f(x) = (x^2 + x + 1)(x + 1)(x - 1),$

b)  $f(x) = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - x - 3).$

4.  $f(x) = (x^2 + 4x + 1)(x^2 - 3x + 1)$ .
5. а) звідний  $f(x) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 2)$ ;  
б) звідний  $f(x) = (x^2 + 2)(x^2 + 3)$ ;  
в) незвідний;  
г) незвідний.
6. а)  $p = 3$ , б)  $p = 5$ , в)  $p = 7$ .

## СПИСОК ОСНОВНИХ ПОНЯТЬ

### А

**Алгебраїчна рівність многочленів:** рівними називаються многочлени  $f(x)$  і  $g(x)$  (позначають  $f(x) = g(x)$ ), якщо їх канонічні форми збігаються, тобто мають однакові степені і попарно рівні відповідні коефіцієнти.

**Алгебраїчно замкнуте поле** – поле  $P$ , якщо воно є полем розкладу для будь-якого многочлена  $f(x) \in P[x]$  ненульового степеня.

**Алгоритм Евкліда** – алгоритм для знаходження найбільшого спільного дільника двох многочленів  $f(x)$  і  $g(x)$ , причому  $\deg f(x) \geq \deg g(x)$ . Виконаємо послідовне ділення з остачею:  $f(x) = g(x)s_1(x) + r_1(x)$ ,  $g(x) = r_1(x)s_2(x) + r_2(x)$ ,  $r_1(x) = r_2(x)s_3(x) + r_3(x)$ , ...,  $r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x)s_n(x) + r_n(x)$ ,  $r_{n-1}(x) = r_n(x)s_{n+1}(x)$ . Остання, відмінна від нуля, остача  $r_n(x)$  у цій системі рівностей і є НСД многочленів  $f(x)$  і  $g(x)$ .

**Асоційовані многочленами** в кільці  $P_n$  – многочлени, які відрізняються множником, який є відмінною від нуля константою:  $f(x) = cg(x)$  або  $g(x) = \frac{1}{c} \cdot f(x) = c^{-1} \cdot f(x)$ .

### В

**Взаємно простими** називаються многочлени  $f(x), g(x) \in P[x]$ , якщо їх спільний дільник є многочленом нульового степеня:  $(f(x), g(x)) = 1$ .

**Відокремлення цілої частини** називається зображення неправильного дроби у вигляді  $\frac{f(x)}{g(x)} = s(x) + \frac{f_1(x)}{g(x)}$ .

**Вільним (нульовим) членом** многочлена  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  називається елемент  $a_0$ .

## Д

**Дискримінантом**  $D(f)$  **многочлена**  $f(x)$  називається вираз виду  $D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{-1} R(f, f')$ , де  $R(f, f')$  – результат  $f(x)$  і його похідної  $f'(x)$ .

**Дискримінантом рівняння**  $x^3 + px + q = 0$  називають число  $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ .

Многочлен  $f(x) \in P[x]$  ділиться **націло** на  $g(x) \in P[x]$  (записується  $f(x) : g(x)$ ), якщо остача  $r(x)$  при діленні  $f(x)$  на  $g(x)$  дорівнює нулю, тобто якщо існує многочлен  $s(x) \in P[x]$  такий, що  $f(x) = g(x)s(x)$ .

**Добутком** **многочленів**  $f(x)$  і  $g(x)$  називають многочлен  $p(x) = c_{n+m}x^{n+m} + c_{n+m-1}x^{n+m-1} + \dots + c_1x + c_0$ ,

де  $c_k = \sum_{j=0}^k a_{k-j}b_j = a_k b_0 + a_{k-1}b_1 + \dots + a_1 b_{k-1} + a_0 b_k$  ( $k=0,1,\dots,n+m$ ) або

$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$ ,  $a_{k-j} = 0$  при  $k-j > 0$ ,  $b_j = 0$  при  $j > m$ , тобто

$$p(x) = f(x) \cdot g(x).$$

## Е

**Елементарним дробом** у полі  $P$  називається раціональний дріб виду  $\frac{f(x)}{(g(x))^k}$ , де  $g(x)$  – незвідний многочлен у полі  $P$ ,  $f(x) \in P[x]$  і  $\deg f(x) \leq \deg g(x)$ , а  $k$  – будь-яке натуральне число.

## З

**Звідним (складеним)** у полі  $P$  називається **многочлен**  $f(x) \in P[x]$ , якщо  $\deg f(x) \geq 1$  і в кільці  $P[x]$  існують

многочлени  $f(x)$  і  $g(x)$ , такі, що  $f(x) = g(x)s(x)$ , причому  $\deg g(x) \geq 1$  і  $\deg s(x) \geq 1$ .

**Звідним у полі  $P$**  називається многочлен  $g \in P_n$ , якщо  $\deg g \geq 1$  і  $\exists_{U, V \in P_n} (g = UV \wedge \deg U \geq 1 \wedge \deg V \geq 1)$ .

**Значенням многочлена  $f(x)$**  при  $x = \alpha$  називається вираз  $f(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0$  з кільця  $R$ , якщо многочлен  $f(x) \in R[x]$  має канонічну форму і  $\alpha \in R[x]$ .

## І

**Інтерполяційним многочленом Лагранжа** називають многочлен  $f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \frac{(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_{i-1})(x - \alpha_{i+1}) \dots (x - \alpha_{n+1})}{(\alpha_i - \alpha_1) \dots (\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_i - \alpha_{i+1}) \dots (\alpha_i - \alpha_{n+1})}$ , де коефіцієнти  $c_0, c_1, \dots, c_n$  визначаються послідовною підстановкою значень  $x = \alpha_1, x = \alpha_2, \dots, x = \alpha_{n+1}$ .

**Інтерполяційним многочленом Ньютона** називають многочлен  $f(x) = c_0 + c_1(x - \alpha_1) + \dots + c_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$ .

## К

**Канонічним розкладом многочлена  $f(x)$**  у полі  $P[x]$  називається зображення  $f(x) = (p_1(x))^{k_1} (p_2(x))^{k_2} \dots (p_m(x))^{k_m}$ , де  $p_k(x)$  – попарно різні (неасоційовні) многочлени, незвідні у полі  $P[x]$ . Це зображення єдине з точністю до сталих множників і їх нумерації.

**Канонічною формою многочлена  $f(x)$**  називається упорядкування його членів за спаданням степеня  $x^k$ .

**Кільцем многочленів  $R[x_1, \dots, x_n]$**  від  $n$  змінних  $x_1, \dots, x_n$  над областю цілісності  $R$  називається кільце многочленів від однієї змінної  $x_n$  над кільцем  $R[x_1, \dots, x_n]$ , тобто  $R[x_1, \dots, x_n] = R[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n]$ .

**Коефіцієнтом члена  $a_i x_1^{K_{1i}} x_2^{K_{2i}} \dots x_n^{K_{ni}}$  многочлена**

$f = \sum_{i=1}^m a_i x_1^{k_{1i}} x_2^{k_{2i}} \dots x_n^{k_{ni}}$  називається відповідний елемент  $a_i \in R$ .

**Константами** називають многочлени нульового степеня, позначають  $\theta(x) = 0$ .

**Коренем многочлена  $f(x) \in P[x]$**  називається елемент  $\alpha$  будь-якого розширення поля  $P$  такий, що  $f(\alpha) = 0$ .

**Коренем многочлена  $f(x) \in P[x]$**  називається елемент  $\alpha \in P$ , якщо  $f(x)$  ділиться на  $x - \alpha$ .

**Коренем многочлена  $f(x)$**  називається число  $\alpha$ , якщо  $f(\alpha) = 0$ .

**Кратними множниками кратності  $k_j$  многочлена  $f(x)$**  буде многочлен  $p_j(x)$ , що входить у канонічний розклад  $f(x) = (p_1(x))^{k_1} (p_2(x))^{k_2} \dots (p_m(x))^{k_m}$  у степені з показником  $k_j$ .

**Кратними множниками многочлена** називаються множники, кратність яких більша за 1.

**Кратні корені** – корені, кратність яких більша за 1.

**$k$ -кратним коренем (або коренем  $k$ -ї кратності)** називається елемент  $\alpha \in P$  многочлена  $f(x) \in P[x]$ , якщо  $f(x)$  ділиться на  $(x - \alpha)^k$ , але не ділиться на  $(x - \alpha)^{k+1}$ .

**$k$ -тим членом або членом  $k$ -го степеня** многочлена  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  називається вираз  $a_k x^k$  ( $k = \overline{1, n}$ ).

## Л

**Лексикографічним записом многочлена** називається відношення “бути вищим” на множині членів многочленів, що є лінійним строгим порядком. Нехай  $ax_1^{K_1} x_2^{K_2} \dots x_n^{K_n}$  і  $bx_1^{L_1} x_2^{L_2} \dots x_n^{L_n}$  – два члени многочлена  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Вважається, що перший

елемент вищий від другого, якщо  $K_1 = L_1, K_2 = L_2, \dots, K_{i-1} = L_{i-1}, K_i > L_i$ .  
 Позначають  $ax_1^{K_1} x_2^{K_2} \dots x_n^{K_n} \succ bx_1^{L_1} x_2^{L_2} \dots x_n^{L_n}$ .

**Лінійним представленням НСД** двох многочленів  $f(x), g(x) \in P[x]$  – це запис виду  $d(x) = f(x)U(x) + g(x)V(x)$ , де  $U(x)$  і  $V(x)$  – деякі многочлени з  $P[x]$ ,  $d(x)$  – найбільший спільний дільник.

## М

**Метод Ньютона** – один з методів знаходження меж дійсних коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами.

**Многочленом (поліномом) від однієї змінної над областю цілісності  $R$**  називається вираз виду  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , де  $n$  – довільне ціле невід’ємне число,  $a_n, \dots, a_1, a_0$  – елементи  $R$ ,  $x, x^2, \dots, x^n$  – деякі символи,  $x^k$  –  $k$ -ий степінь змінної  $x$ ,  $a_k$  –  $k$ -ий коефіцієнт многочлена або коефіцієнт при  $x^k$  ( $k = \overline{1, n}$ ).

**Многочленом від  $n$  змінних над  $R$**  називається кожний елемент кільця  $R[x_1, \dots, x_n]$  і позначається  $f(x_1, \dots, x_n)$ .

**Множником кратності  $k_j$  многочлена  $f(x)$**  називається многочлен  $p_j(x)$ , що входить у канонічний розклад  $f(x) = (p_1(x))^{k_1} (p_2(x))^{k_2} \dots (p_m(x))^{k_m}$  у степені з показником  $k_j$ .

## Н

**Найбільшим спільним дільником** многочленів  $f(x)$  і  $g(x)$  називається їх спільний дільник, який ділиться на кожен інший спільний дільник  $f(x)$  і  $g(x)$ . Позначається  $(f(x), g(x))$ .

**Найменшим спільним кратним** многочленів  $f(x)$  і  $g(x)$  називається їх спільне кратне, на яке ділиться кожне спільне кратне цих многочленів. Позначається  $[f(x), g(x)]$ .

**Незвідним (нерозкладним, простим)** називається многочлен  $f(x) \in P[x]$  у полі  $P$ , якщо він не є константа і не має дільників, відмінних від константи і від многочлена виду  $c \cdot f(x)$ , де  $c$  – константа.

**Незвідним у полі  $P$**  називається многочлен  $p \in P_n$ , якщо  $\deg p \geq 1$  і  $\forall_{U, V \in P_n} (p = UV \Rightarrow \deg U = 0 \vee \deg V = 0)$ .

**Неправильним** називається раціональний дріб  $\frac{f(x)}{g(x)}$ ,

якщо степінь  $f(x)$  більша за степінь  $g(x)$ .

**Нуль–многочленом над  $R$**  називають елемент  $\theta \in R$ , який вважають константою та многочленом, і позначаємо  $\theta(x)$ .

## О

**Область цілісності** – комутативне кільце, в якому не існує дільників нуля.

**Однорідним** називається многочлена, у якого всі члени мають однаковий степінь.

## П

**Подібними** називаються два члени, які відрізняються тільки коефіцієнтами.

**Поле розкладу многочлена  $f(x)$**  – поле  $L$ , в якому многочлен розкладається на лінійні множники.

**Похідною від многочлена  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in$**  називається многочлен  $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1$ .

**Правильним** називається раціональний дріб  $\frac{f(x)}{g(x)}$ , якщо степінь многочлена  $f(x)$  менша за степінь многочлена  $g(x)$ , в іншому разі дріб – **неправильний**.

**Примітивним (відносно  $S$ )** називається многочлен  $f(x) \in S[x]$ ,  $f(x) \neq 0$ , якщо НСД його коефіцієнтів дорівнює одиниці.

**Примітивним** називається многочлен  $p(x)$  з цілими коефіцієнтами, якщо його коефіцієнти не мають спільних дільників, відмінних від  $\pm 1$ .

**Прості корені** – корені кратності 1.

## Р

**Раціональним дробом над  $P$**  називається кожний елемент поля раціональних дробів  $P(x)$ .

**Результантом многочленів  $f(x)$  і  $g(x)$**  називається вираз виду  $R(f, g) = a_n^m g(\alpha_1) g(\alpha_2) \dots g(\alpha_n)$ , де  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  – корені многочлена  $f(x)$ .

**Розкладом многочлена  $f(x)$**  називається зображення  $f(x) = p_1(x)p_2(x)\dots p_l(x)$  многочлена на незвідні множники у полі  $P[x]$ .

**Розкласти многочлен  $f(x)$  за степенями  $x - \alpha$**  означає представити його у вигляді:

$$f(x) = c_n (x - \alpha)^n + c_{n-1} (x - \alpha)^{n-1} + c_1 (x - \alpha) + c_0.$$

## С

**Симетричним відносно змінних  $x_1, \dots, x_n$**  називається многочлен  $f(x_1, \dots, x_n)$ , якщо внаслідок довільної перестановки змінних  $x_1, \dots, x_n$  утворюється многочлен рівний даному.

**Спільним дільником  $f(x)$  і  $g(x)$**  називається многочлен  $d(x)$ , який є дільником многочлена  $f(x)$  і многочлена  $g(x)$ .

**Спільним кратним многочленів  $f(x), g(x) \in P[x]$**  називають будь-який многочлен  $s(x) \in P[x]$  такий, що  $s(x) : f(x) \wedge s(x) : g(x)$ .

**Старшим членом** називається відмінний від нуля член многочлена  $f(x)$ , степінь якого більший за степінь усіх інших відмінних від нуля членів цього многочлена, його коефіцієнт називається **старшим коефіцієнтом**, а його степінь – **степенем многочлена  $f(x)$** .

**Степенем члена  $ax_1^{K_1}x_2^{K_2}\dots x_n^{K_n}$  многочлена** називається сума  $K_1 + K_2 + \dots + K_n$ . Число  $K_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) називається **степенем даного члена відносно  $x_i$** . Найбільший із степенів членів називається **степенем многочлена**, а член з найбільшим степенем – **старшим членом многочлена**.

**Сумою многочленів  $f(x)$  і  $g(x)$**  називають многочлен

$$s(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_{m+1} x^{m+1} + (a_m + b_m) x^m + (a_{m-1} + b_{m-1}) x^{m-1} + \dots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0),$$

тобто  $s(x) = f(x) + g(x)$  ( $n \geq m \geq 0$ ).

## Ф

**Функціональна рівність многочленів:** якщо область цілісності  $R$  має характеристику 0, то многочлени  $f(x), g(x) \in R[x]$  рівні між собою тоді і тільки тоді, коли рівні функції  $\varphi_f$  і  $\varphi_g$ , які вони визначають.

**Формулою Кардано** називається формула, за якою знаходяться корені рівняння  $x^3 + px + q = 0$ :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}.$$

## Ч

**Членом многочлена  $f(x_1, \dots, x_n)$**  називається кожен доданок  $a_i x_1^{K_{1i}} x_2^{K_{2i}} \dots x_n^{K_{ni}}$  в сумі  $f = \sum_{i=1}^m a_i x_1^{k_{1i}} x_2^{k_{2i}} \dots x_n^{k_{ni}}$ .

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пілаєв В.В., Рокицький І.О. Алгебра и теорія чисел: Практикум. Ч.2. Київ: Вища школа. Головне видавництво, 1986. 264 с.
2. Казачек Н.А., Виленкин Н.Я. Алгебра и теория чисел. Москва: Просвещение, 1974. 200 с.
3. Бородин О.І. Теорія чисел. Київ: Вища школа. Головне видавництво, 1970. 274 с.
4. Бурдук А.А., Мурашко Е.А. и др. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии. Минск: Университетское, 1989.
5. Завало С.Т. Курс алгебры Київ: Вища школа. Головне видавництво, 1985. 504 с.
6. Завало С.Т., Костарчук В.Н, Хацет В.И. Алгебра і теорія чисел. Ч.2. Київ: Вища школа. Головне видавництво, 1977. 384 с.
7. Збірник задач з теорії многочленів /відп. ред. І.О. Рокіцький. Вінниця, 2004. 140.
8. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Москва: Наука, 1977. 496 с.
9. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. Москва: Высшая школа, 1979. 559 с.
10. Курдеватов Г.А. Сборник задач по теории чисел. Москва: Просвещение, 1970. 128 с.
11. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. Москва: Наука, 1971. 432с.
12. Проскуряков И.В. Числа и многочлены. Москва: Просвещение, 1965. 284 с.
13. Солодовников А.С., Родина М.А. Задачник–практикум по алгебре Ч. IV. Москва: Просвещение, 1985. 128 с.
14. Фадеев Д.К. Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. Москва: Наука, 1971.
15. Фадеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. Москва: Наука, 1977. 288 с.

**Навчально-методичне видання**

**Ходаковська Олена Олександрівна  
Атамась Володимир Васильович**

## **ТЕОРІЯ МНОГОЧЛЕНІВ**

### **Частина II**

**Навчально–методичний посібник**

Комп'ютерний набір та верстання –  
*О. О. Ходаковська*

Підписано до друку . Формат 60×84/16  
Ум. друк. арк. 1,72. Тираж 300 пр. Зам. №

Виготовлено з оригіналу-макету  
У Черкаському національному університеті  
імені Богдана Хмельницького

Адреса: бульвар Шевченка, 81, м. Черкаси, Україна, 18031  
Тел. (0472) 37-13-16, факс (0472) 35-44-63  
e-mail: vydav@cdu.edu.ua, <http://www/cdu.edu.ua>

Свідоцтво про внесення до державного реєстру  
суб'єктів видавничої справи ДК №3427 від 17.03.2009 р.