

Uncertainty of measuring data with trapeze distribution evaluated by the polynomial maximization method

Ocena niepewności pomiarów o rozkładzie trapezowym metodą maksymalizacji wielomianu

DOI: 10.15199/62.2017.12.6

The types of measurand parameter estimators derived from samples of measured data taken from a sym. trapezoidal population were briefly reviewed (9 refs.). A non-std. approach to find ests. of the non-Gaussian distributions parameters based on the unconventional method for maximizing the stochastic polynomials by using a moment-cumulant description of random variables was proposed. The method was recommended to use for detg. estd. values of the std. deviation and uncertainties of measurand when distribution of the random errors population is a priori unknown and first few cumulants have to be found from the sample data. The method is particularly useful in assessing mixts. and mixing efficiency.

Omówiono w skrócie rodzaje estymatorów parametrów mierzandów wyznaczanych z próbek danych pomiarowych pobranych z populacji o rozkładzie trapezowym. Zaproponowano użycie metody maksymalizacji wielomianu stochastycznego o symbolu PMM jako niekonwencjonalnego sposobu wyznaczania estymatorów wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego mierzandów dla próbek o rozkładach niegaussowskich. Na przykładach próbek z symetrycznego rozkładu trapezowego $Trap$ oszacowano niepewność standardową dla wartości średniej, środka rozpięcia i estymatora mierzandów obliczone-

go metodą wielomianową PMM z użyciem kumulantów, które wyznaczono z danych próbki za pośrednictwem momentów centralnych. Metodą symulacji Monte Carlo dokonano analizy porównawczej ocen wariancji obliczanej klasycznie z funkcji rozkładu prawdopodobieństwa, wg GUM¹⁾, dla środka rozpięcia i metodą PMM. W funkcji liczby danych próbki i stosunku podstaw trapezu określono granice najefektywniejszego obszaru dla każdej z metod. Metoda jest przydatna do oceny mieszanin i procesu mieszania.

Zjawiska losowe zachodzące w badanym obiekcie, systemie pomiarowym i otoczeniu są przyczyną pojawienia się losowej składowej w sygnale pomiarowym mierzandów. Ciągły w czasie sygnał jest zwykle automatycznie próbkowany lub też pomiary powtarza się. Otrzymuje się próbkę danych pomiarowych o losowym rozrzucie wartości. Do jego modelowania, oprócz normalnego rozkładu prawdopodobieństwa opisanego funkcją Gaussa, stosuje się też inne rozkłady. Wynik pomiarów ocenia się wg zaleceń przewodnika GUM¹⁾ jako wartość średnią i rozszerzoną niepewność pomiaru wyznaczaną na podstawie odchylenia standardowego. Dla próbek z populacji o rozkładach niegaussowskich ocena niepewności pomiarów wg metody podanej w GUM nie jest jednak najbardziej efektywna. Będzie to omówione na przykładzie rozkładu trapezowego. Występuje on w przyrządach pomiarowych i systemach z elementami o przedziałowej tolerancji

Doc. (em.) dr inż. Zygmunt L. WARSZA – notkę biograficzną i fotografię Autora wydrukowaliśmy w nr. 8/2017, str. 1767.

* Autor do korespondencji:

Zespół Badań Podstawowych, Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP, Al. Jerozolimskie 202, 02-486 Warszawa, kom.: +48 692-033-661, e-mail: zlw1936@gmail.com



Prof. dr hab. inż. Serhii V. ZABOLOTNII w roku 1995 ukończył studia na Wydziale Technik i Systemów Informatycznych Narodowego Uniwersytetu Technologicznego w Czerkasach. W 2000 r. uzyskał stopień doktora, a w 2015 r. stopień doktora habilitowanego. Pracuje na Wydziale Radiotechniki Uniwersytetu Technologicznego w Czerkasach, obecnie jako profesor. Specjalność – systemy informacyjno-pomiarowe.

parametrów i przy dyskretyzacji sygnałów. Rozkład ten jest spletem dwu równomiernych rozkładów o różnej szerokości. Krańcowymi jego przypadkami są rozkłady: równomierny i trójkątny.

W pracach²⁻⁴⁾ metodą symulacji Monte Carlo (MC) porównano efektywność wartości średniej \bar{X} , środka rozstępu $q_{v/2} = 0,5(x_{max} - x_{min})$ i mediany X_{med} jako jednoelementowych estymatorów (1C) menzurandu dla próbek danych z populacji o rozkładach w postaci symetrycznych trapezów o bokach liniowych lub krzywoliniowych wklęsłych. W Suplemencie 1 do przewodnika¹⁾ rozkłady te są oznaczone odpowiednio jako Trap i CTrap. Wyznaczono standardowe odchylenia (SD) tych trzech podstawowych estymatorów w funkcji liczby n danych próbki i stosunku $\beta \in [0;1]$ długości podstaw trapezu lub kurtozy E . Dla próbek z rozkładu Trap wartość SD średniej \bar{X} jest najmniejsza w przedziale $0 < \beta < 0,35$. Dla większych β , tj. dla $0,35 < \beta \leq 1$, mniejszą wartość SD ma środek rozstępu $q_{v/2}$ (rys. 1). W pracach⁵⁻⁷⁾ wykazano, że dla próbek z rozkładu Trap w całym zakresie β jeszcze mniejsza, i to co najmniej o 20%, jest wartość SD dwuelementowego (2C) estymatora $0,5(\bar{X} + q_{v/2})$. Syntezę tych badań i porównanie estymatorów 1C i 2C zawiera monografia⁷⁾.

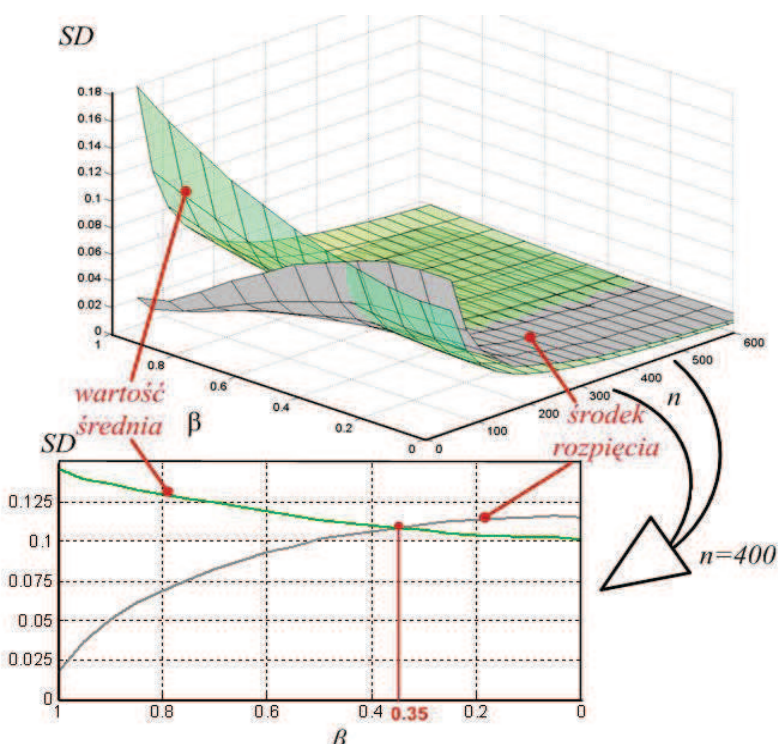


Fig. 1. Standard deviations SD of mean and midrange size of samples of linear trapeze PDF Trap (a, b) as function of ratio $\beta = a/b$ of linear trapeze bases and sample number n ; lower figure SD in function of β for $n = 400$ ⁷⁾

Rys. 1. Standardowe odchylenia SD wartości średniej i środka rozpięcia próbek o PDF w postaci trapezu liniowego Trap (a, b) w funkcji stosunku podstaw trapezu $\beta = a/b$ i liczby danych próbki n ; u dołu SD w funkcji β dla $n = 400$ ⁷⁾

W praktyce, gdy rodzaj rozkładu danych pomiarowych menzurandu nie jest znany *a priori*, to jego jednoznaczna identyfikacja wymaga próbki o dużej liczbie danych. Zbadamy metodą MC dla próbek z rozkładu Trap, jakie wyniki można uzyskać alternatywną metodą maksymalizacji wielomianu PMM (*polynomial maximization method*)⁸⁾. W jej równaniach wykorzystuje się kumulanty, gdyż wówczas otrzymuje się prostsze wzory. Kumulanty oblicza się z centralnych momentów próbki. Dla rozkładu normalnego powyżej czwartego rzędu są one równe zero.

Matematyczne sformułowanie problemu

Symbolem θ oznaczono ocenę wartości menzurandu wyznaczaną z próbki rozproszonych danych pomiarowych metodą PMM. Wartość tę estymuje się przez statystyczną analizę wektora $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Zakłada się, że dane losowe x_i są niezależne, jednostajnie rozłożone

i o wartościach opisanych modelem $\xi = \theta + \xi_0$. W modelu tym ξ_0 jest wycentrowaną zmienną losową. Jako przykład rozpatrzy się próbki z populacji o rozkładzie Trap w postaci symetrycznego trapezu o liniowych bokach, szerokości dolnej podstawy λ i stosunku długości podstaw β . Poprzez próby statystyczne metodą MC dokonywane $M = 10^4$ razy należy zbadać oceny parametrów próbki wyznaczone metodą PMM, tj. dokładności i zbieżność rozkładu empirycznego do funkcji Gaussa, w zależności od liczby danych n próbki. Ponadto należy porównać z ocenami dokładności wartości średniej i środka rozpięcia jako estymatorów menzurandu.

Wyznaczenie ocen metodą PMM i ich właściwości

Podstawy teoretyczne metody PMM

Według metody maksymalizacji wielomianu PMM podanej przez Kunchenko⁹⁾ oszacowanie wartości badanego parametru θ jest rozwiązaniem układu równań stochastycznych (1):

$$\sum_{i=1}^s h_i(\theta) [\hat{\alpha}_i - \alpha_i(\theta)] \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \quad (1)$$

w których s oznacza rząd wielomianu użytego do szacowania para-

metrów, a $h_i(\theta)$ i $\hat{\alpha}_i = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_v^i$ to teoretyczne i początkowe momenty

próbki i -tego rzędu.

Współczynniki $h_i(\theta)$ (dla $i = \overline{1, s}$) wyznacza się, rozwiązując układ algebraicznych równań liniowych rzędu s podany dla warunków minimalizacji wariancji poszukiwanej estymaty wartości parametru θ , określony równaniem (2):

$$\sum_{i=1}^s h_i(\theta) F_{i,j}(\theta) = \frac{d}{d\theta} \alpha_j(\theta), \quad j = \overline{1, s} \quad (2)$$

w którym $F_{i,j}(\theta) = \alpha_{i+j}(\theta) - \alpha_i(\theta)\alpha_j(\theta)$.

Kunchenko⁹⁾ wykazał, że wielomianowe oceny $\hat{\theta}$ stanowiące rozwiązania układu równań (1) są zgodne i asymptotycznie nieobciążone. Aby oszacować niepewność, należy znaleźć objętość wyodrębnionej informacji $J_{sn}(\theta)$ o estymowanych parametrach θ , opisaną ogólnie wzorem (3):

$$J_{sn}(\theta) = n \sum_{i=1}^s h_i(\theta) \frac{d}{d\theta} \alpha_i(\theta) \quad (3)$$

Sens statystyczny funkcji $J_{sn}(\theta)$ jest taki sam jak w klasycznej koncepcji Fishera o ilości informacji. Jeżeli $n \rightarrow \infty$, to jej odwrotność dąży do wariancji estymaty (4):

$$\sigma_{(\hat{\theta})_s}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} J_{sn}^{-1}(\theta) \quad (4)$$

Estymatory symetrycznych rozkładów zmiennych losowych wg metody PMM

W pracy⁹⁾ wykazano też, że oszacowanie wartości składowej stałej metodą PMM w przypadku szczególnym przy stopniu wielomianu $s = 1$ jest równoważne oszacowaniu średniej arytmetycznej dla dowolnego rozkładu zmiennej losowej. W pracy tej wykazano również, że przy symetrii rozkładu wartości współczynników dla nieparzystych kumulantów κ są równe zero, zaś dla wielomianów stopnia $s = 2$ estymaty sprowadzają się do liniowych. Przy użyciu wielomianów stopnia $s = 3$ znalezienie estymat parametrów wg algorytmu PMM dla symetrycznych rozkładów wymaga rozwiązania stochastycznego równania trzeciego stopnia (5)⁸⁾:

$$a\theta^3 + b\theta^2 + c\theta + d \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \quad (5)$$

w którym $a = \gamma_4$, $b = -3\gamma_4\hat{\alpha}_1$, $d = (6 + 12\gamma_4 + \gamma_6)\kappa_2\hat{\alpha}_1 - \gamma_4\hat{\alpha}_3$, $c = 3\gamma_4\kappa_2 - (6 + 12\gamma_4 + \gamma_6)\kappa_2 + 3\gamma_4[\hat{\alpha}_2 - \kappa_2]$, kumulanty: $\kappa_1 = m_1$, $\kappa_2 = \mu_2$, $\kappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2$, $\kappa_6 = \mu_6 - 15\mu_2\mu_4 - 10\mu_3^2 + 30\mu_2^3$, a współczynniki kumulantów: $\gamma_4 = \kappa_4/\kappa_2^2$, $\gamma_6 = \kappa_6/\kappa_2^3$.

We wzorze (5) statystyki $\hat{\alpha}_i$, $i = \overline{1,3}$, podobnie jak i we wzorze (1), są momentami początkowymi próbki, zaś κ_2 , γ_4 i γ_6 to kolejno: teoretyczny kumulant 2. rzędu i współczynniki kumulantów rzędów 4. i 6. zmiennej losowej ξ_0 . Równanie stochastyczne (5) daje się rozwiązać analitycznie przez zastosowanie wzorów Cardana^{8,9)}.

Estymata odchylenia standardowego wg metody PMM dla rozkładów symetrycznych

Estymator wariancji średniej arytmetycznej (identyczny jak dla metody PMM przy $s = 1$) nie zależy od wartości oszacowania parametru θ . Jest on określony dla próbki przez wariancję drugiego rzędu μ_2 równą kumulantowi κ_2 podzielonemu przez liczbą jej danych n , wg wzoru (6):

$$\sigma_{(\theta)1}^2 = \frac{\kappa_2}{n} \quad (6)$$

Wykorzystując wzór (3) opisujący wielkość uzyskanej informacji o badanym parametrze, otrzymano wyrażenie analityczne^{8,9)} dla wartości asymptotycznej wariancji $\sigma_{(\alpha)3}^2$ przy $n \rightarrow \infty$, oszacowanej metodą PMM. Podaje ją wzór (7):

$$\sigma_{(\alpha)3}^2 = \frac{\kappa_2}{n} \left[1 - \frac{\gamma_4}{6 + 9\gamma_4 + \gamma_6} \right] \quad (7)$$

Wynika z niego wzór (8) dla współczynnika stosunku wariancji:

$$g_{(\theta)3} = \frac{\sigma_{(\theta)3}^2}{\sigma_{(\theta)1}^2} = 1 - \frac{\gamma_4}{6 + 9\gamma_4 + \gamma_6} \quad (8)$$

Wartości $g_{(\theta)3}$ należą do przedziału (0; 1]. Zależą one tylko od właściwości rozkładu prawdopodobieństwa określonych przez współczynniki kumulantów γ_4 i γ_6 ⁸⁾.

Statystyczne modelowanie estymatorów

Implementacji modelowania statystycznego dokonano za pomocą pakietu oprogramowania opracowanego w środowisku MATLAB. Wykorzystano metodę MC, opartą na wielokrotnie powtarzanych testach o losowo zmienianych danych. Umożliwiła ona analizę dokładności proponowanych algorytmów statystycznej estymacji wielomianowej i zbadanie probabilistycznych właściwości uzyskanych oszacowań. Jako kryteria służące do porównywania skuteczności stosowano eksperymentalne stosunki wariancji opisane wzorami (9):

$$\hat{g}_{(\theta)3} = \frac{\hat{\sigma}_{(\theta)3}^2}{\hat{\sigma}_{(\theta)1}^2}, \quad \hat{q}_{(\theta)3} = \frac{\hat{\sigma}_{(\theta)3}^2}{\hat{\sigma}_{(\theta)1/2}^2} \quad (9)$$

w których $\hat{\sigma}_{(\theta)1/2}^2$, $\hat{\sigma}_{(\theta)1}^2$ i $\hat{\sigma}_{(\theta)3}^2$ oznaczają uśrednione dla M prób MC wartości oszacowań wariancji parametrów θ , obliczone odpowiednio dla statystyk środka rozpięcia $q_{V/2}$, średniej arytmetycznej \bar{X} i metodą PMM o stopniu wielomianu $s = 3$.

Wiarygodność wyników symulacji algorytmami estymacji statystycznej zależy od dwu czynników: wielkości próbki (czyli liczby n elementów wektora \vec{x}) i od liczby M statystycznych eksperymentów wykonanych w jednakowych warunkach początkowych (wartość β trapezu).

Obliczenia wartości estymat metodą wielomianową PMM nie wymagają informacji o rodzaju rozkładu. Korzystano z wartości trzech parametrów modelu: κ_2 , γ_4 i γ_6 . W badaniach opisanych w pracy⁸⁾ wartości tych parametrów modelu obliczono z analitycznych wyrażeń wiążących parametry rozkładu gęstości prawdopodobieństwa (pdf), uwzględniając momenty początkowe, odpowiednie kumulanty i współczynniki kumulantów. Jednak w praktyce, gdy informacje na

temat rozkładu pdf i/lub wartości ich parametrów nie są znane *a priori*, można zastosować podejście adaptacyjne, wykorzystując w danym badaniu oszacowania *a posteriori*. Uzyskano je za pomocą zależności asymptotycznych ze wzoru (10):

$$\hat{\kappa}_2 = \hat{\mu}_2, \quad \hat{\gamma}_4 = \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\mu}_2^2} - 3, \quad \hat{\gamma}_6 = \frac{\hat{\mu}_6}{\hat{\mu}_2^3} - 15 \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\mu}_2^2} + 30 \quad (10)$$

w którym $\hat{\mu}_i$ oznacza moment centralny i -tego rzędu wyznaczony z próbki (11):

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n (x_v - \bar{x})^i \quad (11)$$

W tabeli 1 przedstawiono wyniki badań uzyskane z symulacji Monte Carlo. Współczynniki stosunków wariancji uzyskano doświadczalnie z $M = 10^4$ prób i różnych wartości parametru β . Analiza danych

Table 1. The coefficients of the variance ratio of estimates

Tabela 1. Współczynniki stosunku wariancji estymat

β	$g_{(\theta)3}$	Wyniki modelowania					
		$\hat{g}_{(\theta)3} = \hat{\sigma}_{(\theta)3}^2 / \hat{\sigma}_{(\theta)1}^2$			$\hat{q}_{(\theta)3} = \hat{\sigma}_{(\theta)3}^2 / \hat{\sigma}_{(\theta)1/2}^2$		
		n					
		20	50	200	20	50	200
$\beta = 1$	0,3	0,56	0,36	0,32	2,15	3,51	10,4
$\beta = 0,75$	0,36	0,61	0,45	0,38	1,53	1,29	1,04
$\beta = 0,5$	0,55	0,78	0,63	0,57	1,02	0,85	0,74
$\beta = 0,25$	0,76	0,97	0,86	0,79	0,9	0,77	0,71
$\beta = 0$	0,84	1,03	0,95	0,87	0,84	0,76	0,69

zawartych w tej tabeli wykazała znaczną korelację pomiędzy obliczeniami analitycznymi i wynikami modelowania statystycznego. Wraz ze wzrostem liczby danych n w próbce \vec{x} różnica pomiędzy teoretycznymi $g_{(\theta)3}$ i eksperymentalnymi $\hat{g}_{(\theta)3}$ wartościami współczynników stosunku wariancji zmniejszała się (np. dla $n = 50$ różnica ta nie przekraczała 20%, a przy $n = 200$ spadała już poniżej 10%). Ogólnie, potwierdziła się asymptotyczna właściwość o ilości pobranej informacji o badanym parametrze, opisanej wzorem (4) i wykorzystywanej do obliczania estymat wariancji metodą wielomianową PMM.

Analiza pełnego zestawu wyników symulacji statystycznej z tabeli 1 potwierdziła też, że efektywność zastosowania danej statystyki do oszacowania niepewności parametrów rozkładu istotnie zależy od przyjętego modelu opisującego losowe błędy pomiarowe i od liczebności n próbki. Na podstawie wyników wielu powtórzonych badań metodą MC próbek o $n = 15 \dots 200$ danych stworzono rys. 2. Przedstawia on

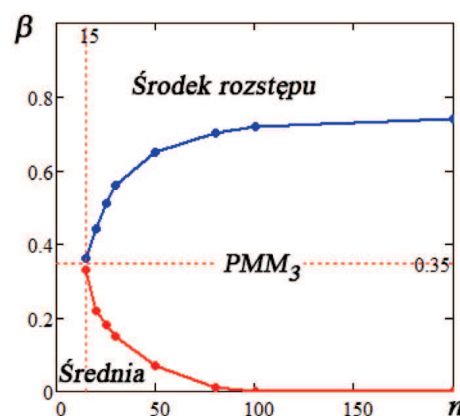


Fig. 2. Areas of effectiveness of methods for finding estimates of the trapezoidal distribution standard deviation

Rys. 2. Obszary efektywności metod znajdowania estymat standardowego odchylenia rozkładu trapezowego

w funkcji wartości parametrów n i β granice obszarów, które wg kryterium minimalnej wariancji pokazują obszary największej efektywności trzech statystyk: parametru θ wg metody PMM, średniej arytmetycznej \bar{X} i środka rozstępu $q_{1/2}$. Tu też dla próbek z rozkładu Trap występuje podana w pracach^{2,3)} granica obszaru $1 \geq \beta > 0,35$ o mniejszej wartości SD środka rozpięcia niż średniej arytmetycznej.

Innym ważnym rezultatem modelowania statystycznego było potwierdzenie tezy o asymptotycznym dążeniu (przy $n \rightarrow \infty$) rozkładu estymat parametrów wielomianu metody PMM do rozkładu Gaussa. Można to wykorzystać do wyznaczania niepewności rozszerzonej.

Przykłady wyników modelowania podano na rys. 3. Pokazuje on rozkłady otrzymanych eksperymentalnie wartości liczbowych ocen dla wartości mierzonych wg metody PMM₃ (dla $s = 3$) oraz środka rozpięcia i średniej arytmetycznej. Dane wejściowe to $M = 10^4$ prób (trials) metodą MC dla próbek o $n = 50$ danych. Zawierają one oceny parametru $\theta = 0$ dla trapezowego rozkładu błędów przy $\beta = 0,5$ i $\lambda = 6$.

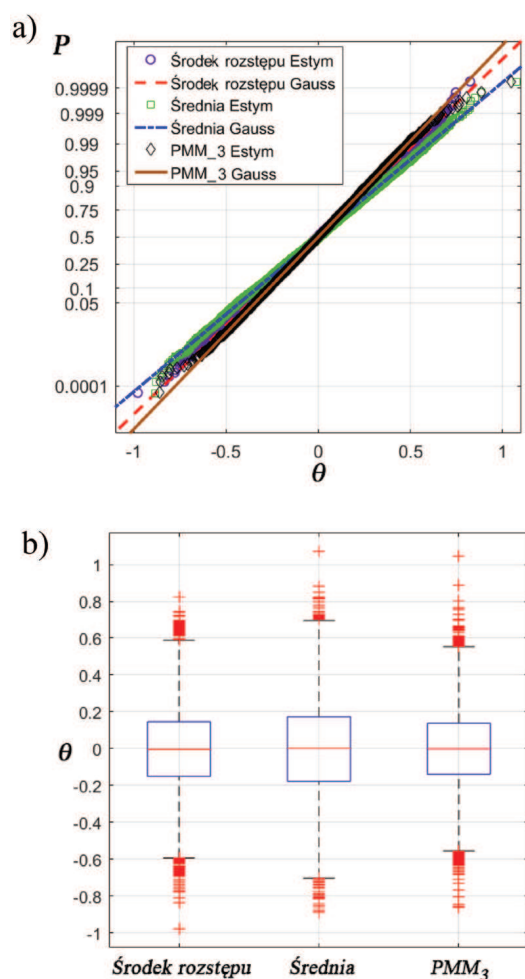


Fig. 3. The empirical distribution of estimates of the SD parameter: a) the probabilistic graph (Q-Q plot) of Gaussian approximation; b) a plot of the type Box-plot (99% confidence interval)

Rys. 3. Empiryczne rozkłady estymat parametru SD: a) wykres probabilistyczny (Q-Q wykres) przybliżenia do funkcji Gaussa; b) wykres typu box-plot (dla przedziału ufności 99%)

Adekwatność hipotezy o gaussowskim rozkładzie estymat metody PMM sprawdzono także za pomocą wbudowanego w oprogramowanie MATLAB testu Lillieforsa opartego na statystyce Kołmogorowa i Smirnowa. W tabeli 2 przedstawiono wyniki tych badań jako zestaw parametrów wyjściowych testu, w którym CV oznacza krytyczną wartość statystyki testu; $LSTAT$ wybraną wartość statystyki testowej, a P poziom istotności. Jeśli $LSTAT < CV$ to przy zadanym poziomie istotności $\alpha_0 = 0,05$ hipotezy zerowej (Gaussa) nie odrzucano.

Table 2. Results of testing hypotheses of Gaussianity of the empirical distribution estimates, found by PMM₃ method of degree $s = 3$

Tabela 2. Wyniki badania hipotezy o gaussowskim rozkładzie wyznaczonym metodą PMM₃ (dla $s = 3$)

β	CV	Wyniki testu Lillieforsa					
		$LSTAT$			P		
		n					
		20	50	200	20	50	200
$\beta = 1$	0,009	0,029	0,021	0,008	0,001	0,001	0,12
$\beta = 0,75$		0,028	0,016	0,007	0,001	0,002	0,18
$\beta = 0,5$		0,014	0,007	0,005	0,002	0,18	0,5
$\beta = 0,25$		0,01	0,008	0,005	0,006	0,19	0,5
$\beta = 0$		0,008	0,007	0,005	0,18	0,21	0,5

Podsumowanie

Przedstawione badania pozwalają sformułować ogólny wniosek o możliwości wykorzystania metody maksymalizacji wielomianu PMM do oszacowania odchylenia standardowego rozkładu trapezowego, czyli jego niepewności u_A .

Analiza łączna uzyskanych wyników wykazuje, że dla szerokiego zakresu wartości parametrów opisujących właściwości probabilistyczne rozkładu trapezowego (zakres wartości β był pełny) estymaty odchylenia standardowego SD obliczone metodą Monte Carlo dla metody wielomianowej PMM₃ są bardziej efektywne (mają mniejszą wariancję) w porównaniu z estymatami SD obliczonymi dla średniej arytmetycznej i środka rozstępu. Wielkości zmniejszenia wariancji estymat, jak i stopień normalizacji ich rozkładu w dużej mierze zależą od liczby danych w próbkach.

Omówiona tu niekonwencjonalna metoda PMM opiera się na pierwszych kilku kumulantach wyznaczanych z danych próbki. Można ją z powodzeniem stosować do wyznaczania wyniku pomiarów, gdy rozkład danych próbki jest *a priori* nieznan, a zbyt mała liczba tych danych uniemożliwia jednoznaczną jego identyfikację.

Otrzymano: 22-06-2015

LITERATURA

- [1] Evaluation of measurement data. Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM), BIPM, JCGM 100 (2008) + Supplement 1. Propagation of distributions using a Monte Carlo method, JCGM 101 (2008).
- [2] Z.L. Warsza, M. Galovska, *Przeegl. Elektrotech.* 2009, nr 5, 86.
- [3] Z.L. Warsza, M. Galovska, *Mat. IMEKO World Congress "Fundamental and Applied Metrology"*, Lizbona (Portugalia), wrzesień 2009 r., 2405.
- [4] Z.L. Warsza, M.V. Galovskaja, *Sistemy Obrobotki Inf.* 2009, 4, nr 78, 28.
- [5] Z.L. Warsza, *Pomiary Automatyka Kontrola* 2011, 57, nr 1, 105.
- [6] Z.L. Warsza, *J. Automation, Mobile Robotics Intelligent Systems* 2012, 6, nr 1, 35.
- [7] Z.L. Warsza, *Metody rozszerzenia analizy niepewności pomiarów*, PIAP Warszawa 2016.
- [8] W. Serhii Zabolotnii, Z.L. Warsza, *Proceedings of Automation 2017. Innovations in automation, robotics and measurement techniques* (red. R. Szewczyk i in.), Advances in Intelligent Systems and Computing 550, Springer International Publ., 2017, 470.
- [9] Y. Kunchenko, *Polynomial parameter estimations of close to Gaussian random variables*, Shaker Verlag, Aachen 2002.