О. О. Ходаковська, Н. М. Гордієнко,
Н. Г. Ілляшенко, В. В. Атамась

ТЕОРІЯ МНОГОЧЛЕНІВ

Частина І

Черкаси – 2018

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ БОГДАНА ХМЕЛЬНИЦЬКОГО

**О. О. Ходаковська, Н. М. Гордієнко,
Н. Г. Ілляшенко, В. В. Атамась**

ТЕОРІЯ МНОГОЧЛЕНІВ

Частина I

Навчально–методичний посібник

Черкаси – 2018

УДК
ББК
Х 69

Рецензенти:

В. С. Ковтуненко – кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідуючий кафедри вищої математики Черкаського державного технологічного університету

В. І. Слинько – доктор фізико-математичних наук, професор з кафедри алгебри і математичного аналізу Черкаського націанольного університету імені Богдана Хмельницького

Рекомендовано до друку Вченою радою Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького
(протокол №)

Ходаковська О.О., Гордієнко Н.М., Ілляшенко Н.Г., Атамась В.В.
Х 69 Теорія многочленів. Частина І: Навчально-методичний посібник / [О. О. Ходаковська, Н. М. Гордієнко, Н. Г. Ілляшенко, В. В. Атамась] . – Черкаси: ЧНУ імені Богдана Хмельницького, 2018. – 102 с.
ISBN

Матеріал посібника призначений для ефективної самостійної роботи студентів вищих навчальних закладів стаціонарної та заочної форми навчання та підготовки їх до занять.

Посібник містить довідково–теоретичний матеріал по темах «Многочлени від однієї змінної», «Многочлени від кількох змінних», «Многочлени над числовими полями». В кожному розділі наведено приклади детального розв'язку типових задач.

УДК
ББК

ISBN

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Курс «Теорія многочленів» за навчальними програмами вищих навчальних закладів входить як розділ до курсу «Вища математика». Вивчення курсу передбачає розширення і поглиблення знань студентів по темі «Многочлени» з шкільного курсу математики.

Даний навчально–методичний посібник містить довідково–теоретичний матеріал по темах «Многочлени від однієї змінної», «Многочлени від кількох змінних», «Многочлени над числовими полями». В кожному розділі наведено приклади детального розв’язку типових задач.

Матеріал посібника допоможе студентам вищих навчальних закладів, які вивчають курс «Лінійна алгебра», «Аналітична геометрія та лінійна алгебра», «Вища математика» в організації самостійної роботи та підготовці до занять.

Навчальний посібник містить словник основних понять та означень многочленів, що значно полегшує самостійну роботу студентів.

РОЗДІЛ 1. МНОГОЧЛЕНИ ВІД ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1.1. Кільце многочленів над областю цілісності

Означення. Комутативне кільце, в якому не існує дільників нуля називається *областю цілісності*.

Означення. *Многочленом (поліномом) від однієї змінної над областю цілісності R* називається вираз виду

$$f(x) = a_n x^x + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

де n – довільне ціле невід'ємне число,

$a_n, ..., a_1, a_0$ – елементи *R*,

$x, x^2, ..., x^n$ – деякі символи,

x^k – *k*–ий степінь змінної x,

a_k – *k*–ий коефіцієнт многочлена або коефіцієнт при x^k ($k = \overline{1, n}$).

Означення. Вираз $a_k x^k$ ($k = \overline{1, n}$) називається *k–тим членом* або *членом k–го степеня* многочлена $f(x) = a_n x^x + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, а число a_0 називається *нульовим* або *вільним членом*.

Якщо $a_k = 0$ (тобто є нульовим елементом області цілісності *R*), то кажуть, що *k*–тий член многочлена $f(x)$ дорівнює нулю або його немає.

Означення. Відмінний від нуля член многочлена $f(x)$, степінь якого більший за степінь усіх інших відмінних від нуля членів цього многочлена, називається *старшим членом*, його коефіцієнт – *старшим коефіцієнтом*, а його степінь – *степенем многочлена* $f(x)$.

Степінь многочлена $f(x)$ позначають $\deg f$. Многочлени нульового степеня називають *константами* і позначають $\theta(x) = 0$.

Нехай дано два многочлени над областю цілісності R: $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$,
$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0$.

Означення. Многочлени $f(x)$ і $g(x)$ називаються *рівними* між собою $f(x)=g(x)$, якщо їх канонічні форми збігаються, тобто мають однакові степені і попарно рівні відповідні коефіцієнти **(алгебраїчна рівність многочленів)**.

Означення. *Сумою многочленів* $f(x)$ і $g(x)$ називають многочлен $s(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_{m+1}x^{m+1}+(a_m+b_m)x^m+$
$+(a_{m-1}+b_{m-1})x^{m-1}+...+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$,
тобто $s(x)=f(x)+g(x)$ $(n\geq m\geq 0)$.

Наслідок 1. Якщо $f(x)\in R[x]$, $g(x)\in R[x]$, то $f(x)+g(x)\in R[x]$.

Наслідок 2. Степінь суми двох многочленів не перевищує більшого з степенів даних многочленів:

$$\deg(f(x)+g(x))\leq\max(\deg f(x), \deg g(x)).$$

Наслідок 3. Для довільного многочлена $f(x)\in R[x]$ і $\theta(x)\in R[x]$: $f(x)+\theta(x)=f(x)$.

Означення. *Добутком многочленів* $f(x)$ і $g(x)$ називають многочлен

$$p(x)=c_{n+m}x^{n+m}+c_{n+m-1}x^{n+m-1}+...+c_1x+c_0,$$

де $c_k=\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}b_j=a_kb_0+a_{k-1}b_1+...+a_1b_{k-1}+a_0b_k$ $(k=0,1,...,n+m)$

або $c_k=\sum_{i+j=k}a_ib_j$, $a_{k-j}=0$ при $\mathrm{k}-\mathrm{j}>0, \mathrm{b}_\mathrm{j}=0$ при $\mathrm{j}>\mathrm{m}$, тобто $p(x)=f(x)\cdot g(x)$.

Наслідок 4. Якщо $f(x)\in R[x]$, $g(x)\in R[x]$, то $f(x)g(x)\in R[x]$.

Наслідок 5. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ не є нуль–многочленами, то $\deg(f(x)g(x))=\deg f(x)+\deg g(x)$.

Наслідок 6. При множенні двох многочленів, з яких один є нуль–многочленом, дістаємо нуль–многочлен:

$$f(x)=\theta(x)\vee g(x)=\theta(x) \;\Rightarrow\; f(x)g(x)=\theta(x).$$

Теорема 1. Сукупність $R[x]$ всіх многочленів над областю цілісності R є область цілісності відносно операцій додавання та множення многочленів.

Наслідок. $R[x]$ кільце з одиницею тоді і тільки тоді, коли R кільце з одиницею.

Якщо многочлен $f(x)\in R[x]$ має канонічну форму і $\alpha\in R[x]$, то вираз $f(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\ldots+a_1\alpha+a_0$ з кільця R називається *значенням многочлена* $f(x)$ при $x=\alpha$.

Якщо $f(\alpha)=0$, то число α називається *коренем многочлена* $f(x)$.

Теорема 2. Якщо $f(x)$ – будь–який многочлен над областю цілісності R, а C – деяке комутативне кільце, яке є розширенням R, то поставивши кожному елементу $\alpha\in C$ у відповідність елемент $f(\alpha)\in C$, отримаємо функцію $\varphi_f:C\to C;\varphi_f(\alpha)=f(\alpha)$.

Кожен многочлен $f(x)\in R[x]$ визначає відображення $\varphi_f:R\to R$ будь–якого комутативного розширення C кільця R в себе.

Теорема 3. Нехай $f(x)$ і $g(x)$ – многочлени над областю цілісності R, $s(x)=f(x)+g(x)$, $p(x)=f(x)g(x)$, а C – будь–яке комутативне розширення кільця R, тоді $\forall\alpha\in C$ $s(\alpha)=f(\alpha)+g(\alpha)$, $p(\alpha)=f(\alpha)g(\alpha)$, тобто $\varphi_s=\varphi_f+\varphi_g$; $\varphi_p=\varphi_f\cdot\varphi_g$.

Теорема 4. Якщо R – область цілісності характеристики 0, то многочлен $q(x)\in R[x]$ є нуль–многочленом тоді і тільки тоді, коли його значення в усіх точках області R дорівнюють нулю.

Наслідок. Якщо область цілісності R має характеристику 0, то многочлени $f(x),g(x)\in R[x]$ рівні між собою тоді і тільки тоді, коли рівні функції φ_f і φ_g, які вони визначають **(функціональна рівність многочленів)**.

Алгебраїчне і функціональне тлумачення многочленів над числовими полями рівносильні над областю цілісності характеристики 0.

Якщо многочлени рівні алгебраїчно, то очевидно вони рівні і функціонально. Обернене твердження не виконується.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Встановити рівність чи відмінність між многочленами у кільці $C[x]$:

$$f_1(x) = 5^{-\log_5 2} x^3 - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} x^2 + 2x - tg\frac{\pi}{4},$$

$$f_2(x) = \left(1 - \sin\frac{\pi}{6}\right)x^3 - (i-1)^2 x^2 + 2 - i,$$

$$f_3(x) = \frac{1}{2}x^3 - \left(\sqrt{3} - 1\right)x^2 - 2i^2 x - i^4,$$

$$f_4(x) = \cos\frac{\pi}{3}x^3 + 2i^3 x^2 + i^7 + 2,$$

$$f_5(x) = \left(\frac{1}{6} + tg^2\frac{\pi}{6}\right)x^3 - \left(tg\frac{\pi}{3} - 1\right)x^2 - 4\cos^2\frac{\pi}{3}x - 2^0.$$

Розв'язання.

Виконуючи арифметичні обчислення, отримаємо такі многочлени, рівносильні даним:

$f_1(x) = \frac{1}{2}x^3 - \left(\sqrt{3} - 1\right)x^2 + 2x - 1,$ оскільки $5^{-\log_5 2} = \frac{1}{5^{\log_5 2}} = \frac{1}{2},$

$\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2} = \left|\sqrt{3} - 1\right| = \sqrt{3} - 1,\ tg\frac{\pi}{4} = 1.$

$f_2(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2ix^2 + 2 - i$, оскільки $1 - \sin\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$

$(i-1)^2 = i^2 - 2i + 1 = -1 - 2i + 1 = -2i$.

$f_3(x) = \frac{1}{2}x^3 - \left(\sqrt{3}-1\right)x^2 + 2x - 1$, оскільки $-2i^2 = 2$, $i^4 = 1$.

$f_4(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2ix^2 + 2 - i$, оскільки $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $2i^3 = -2i$, $i^7 = -i$.

$f_5(x) = \frac{1}{2}x^3 + \left(\sqrt{3}-1\right)x^2 - x - 1$, оскільки $\frac{1}{6} + tg^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$,

$tg\frac{\pi}{3} - 1 = \sqrt{3} - 1$, $4\cos^2\frac{\pi}{3} = 1$, $2^0 = 1$.

Отже, рівними є такі многочлени: $f_1(x) = f_3(x)$, $f_2(x) = f_4(x)$.

Приклад 2. Знайти всі цілі значення a і b, при яких многочлени є квадратом деякого многочлена $g(x)$ з того самого кільця та записати многочлен $g(x)$:

a) $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1$ з кільця $Z[x]$;

b) $f(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + ax + 1$ з кільця $Z[x]$;

c) $f(x) = \bar{4}x^4 + \bar{a}x^2 - \bar{1}$ з кільця $Z_5[x]$;

d) $f(x) = 9x^4 - 12x^3 + 16x^2 - 8x + a$ з кільця $Z[x]$.

Розв'язання.

a) Многочлен $f(x)$ має степінь 4. Тому степінь шуканого многочленна $g(x)$ (якщо він існує!) рівна 2. Нехай $g(x) = cx^2 + dx + k$, $c \neq 0$ і $f(x) = (g(x))^2$. Запишемо многочлен $(g(x))^2$ у канонічній формі:

$(g(x))^2 = (cx^2 + dx + k)^2 = c^2x^4 + 2cdx^3 + \left(2ck + d^2\right)x^2 + 2dkx + k^2$.

З умови алгебраїчної рівності многочленів маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} c^2 = 1, \\ 2cd = a, \\ 2ck + d^2 = b, \\ 2dk = -8, \\ k^2 = 1. \end{cases}$$

З першого і останнього рівнянь системи знаходимо, що $c = k = \pm 1$. Це означає, що дана система рівносильна сукупності чотирьох систем:

$$\begin{cases} c = 1, \\ k = 1, \\ a = -8, \\ b = 18, \\ d = -4. \end{cases} \quad \begin{cases} c = 1, \\ k = -1, \\ a = 8, \\ b = 14, \\ d = 4. \end{cases} \quad \begin{cases} c = -1, \\ k = 1, \\ a = 8, \\ b = 14, \\ d = -4. \end{cases} \quad \begin{cases} c = -1, \\ k = -1, \\ a = -8, \\ b = 18, \\ d = 4. \end{cases}$$

Отже, при $a = -8$ і $b = 18$ многочлени $g_1(x)$ і $g_2(x)$ мають вигляд: $g_1(x) = x^2 - 4x + 1$, $g_2(x) = -x^2 + 4x - 1$. При $a = 8$ і $b = 14$ отримуємо такі многочлени: $g_1(x) = x^2 + 4x - 1$, $g_2(x) = -x^2 - 4x + 1$.

b) Аналогічно $g(x) = cx^2 + dx + k$, $c \neq 0$ і $f(x) = (g(x))^2$. Запишемо многочлен $(g(x))^2$ у канонічній формі:

$$(g(x))^2 = (cx^2 + dx + k)^2 = c^2x^4 + 2cdx^3 + (2ck + d^2)x^2 + 2dkx + k^2.$$

З умови алгебраїчної рівності многочленів маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} c^2 = 1, \\ 2cd = 6, \\ 2ck + d^2 = 11, \\ 2dk = a, \\ k^2 = 1. \end{cases}$$

З першого і останнього рівнянь системи знаходимо, що $c = k = \pm 1$. Це означає, що дана система рівносильна сукупності чотирьох систем, дві з яких мають розв'язки:

$$\begin{cases} c = 1, \\ k = 1, \\ d = 3, \\ a = 6. \end{cases} \qquad \begin{cases} c = -1, \\ k = -1, \\ d = -3, \\ a = 6. \end{cases}$$

Отже, при $a = 6$ многочлени $g_1(x)$ і $g_2(x)$ мають вигляд: $g_1(x) = x^2 + 3x + 1,\ g_2(x) = -x^2 - 3x - 1$.

c) Аналогічно $g(x) = cx^2 + dx + k$, $c \neq 0$ і $f(x) = (g(x))^2$. Запишемо многочлен $(g(x))^2$ у канонічній формі:

$(g(x))^2 = (cx^2 + dx + k)^2 = c^2x^4 + 2cdx^3 + (2ck + d^2)x^2 + 2dkx + k^2$.

З умови алгебраїчної рівності многочленів маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} c^2 = 9, \\ 2cd = -12, \\ 2ck + d^2 = 16, \\ 2dk = -8, \\ k^2 = a. \end{cases}$$

З першого рівняння системи знаходимо, що $c = \pm 3$. Це означає, що дана система рівносильна сукупності двох систем:

$$\begin{cases} c = 3, \\ d = -2, \\ k = 2, \\ a = 4. \end{cases} \qquad \begin{cases} c = -3, \\ d = 2, \\ k = -2, \\ a = 4. \end{cases}$$

Отже, при $a = 4$ многочлени $g_1(x)$ і $g_2(x)$ мають вигляд: $g_1(x) = 3x^2 - 2x + 2,\ g_2(x) = -3x^2 + 2x - 2$.

d) Многочлен $f(x)$ має степінь 4. Тому степінь шуканого многочленна $g(x)$ (якщо він існує!) рівна 2. Нехай

$g(x)=cx^2+dx+k$, $c\neq 0$ і $f(x)=\left(g(x)\right)^2$. Запишемо многочлен $\left(g(x)\right)^2$ у канонічній формі:

$$\left(g(x)\right)^2=(cx^2+dx+k)^2=c^2x^4+2cdx^3+\left(2ck+d^2\right)x^2+2dkx+k^2.$$

З умови алгебраїчної рівності многочленів маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} c^2=4, \\ 2cd=0, \\ 2ck+d^2=a, \\ 2dk=0, \\ k^2=-\overline{1}.=4 \end{cases}$$

З першого і останнього рівнянь системи знаходимо, що $c=k=\pm 1$. Це означає, що система рівносильна сукупності чотирьох систем:

$$\begin{cases} c=\overline{2}, \\ d=\overline{0}, \\ k=\overline{2}, \\ a=\overline{8}=\overline{3}. \end{cases} \quad \begin{cases} c=-\overline{2}=\overline{3}, \\ d=\overline{0}, \\ k=\overline{2}, \\ a=-\overline{8}=\overline{2}. \end{cases} \quad \begin{cases} c=\overline{2}, \\ d=\overline{0}, \\ k=-\overline{2}=\overline{3}, \\ a=-\overline{8}=\overline{2}. \end{cases} \quad \begin{cases} c=-\overline{2}=\overline{3}, \\ d=\overline{0}, \\ k=-\overline{2}=\overline{3}, \\ a=\overline{8}=\overline{3}. \end{cases}$$

Отже, при $a=3$ многочлени $g_1(x)$ і $g_2(x)$ мають вигляд: $g_1(x)=\overline{2}x^2+\overline{2},\ g_2(x)=\overline{3}x^2+\overline{3}$. При $a=2$ отримуємо такі многочлени: $g_1(x)=\overline{2}x^2+\overline{3},\ \ g_2(x)=\overline{3}x^2+\overline{2}.$

Приклад 3. Довести, що з функціональної точки зору наступні многочлени дорівнюють один одному: $f(x)=\overline{2}x^2+x+\overline{1},\ g(x)=\overline{2}x^3+\overline{2}x^2+\overline{2}x+\overline{1}$ з кільця $Z_3[x]$.

Розв'язання.

$Z_3=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}$ – остачі від ділення на 3 (лишки за модулем 3). З функціональної точки зору многочлени рівні, якщо рівні між собою функції φ_f і φ_g, які вони визначають, тобто, якщо функції набувають однакових значень при однакових лишках:

$f(\overline{0}) = \overline{1}$, $\quad g(\overline{0}) = \overline{1}$,

$f(\overline{1}) = \overline{2} + \overline{1} + \overline{1} = \overline{4} = \overline{1}$, $\quad g(\overline{1}) = \overline{2} + \overline{2} + \overline{2} + \overline{1} = \overline{7} = \overline{1}$,

$f(\overline{2}) = \overline{8} + \overline{2} + \overline{1} = \overline{11} = \overline{2}$, $\quad g(\overline{2}) = \overline{16} + \overline{8} + \overline{4} + \overline{1} = \overline{29} = \overline{2}$.

Запишемо результати у таблицю:

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$f(x)$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$g(x)$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

Отже, $f(x) = g(x)$ з функціональної точки зору.

Приклад 4. Знайти суму коефіцієнтів многочлена $f(x)$ у кільці $Z_7[x]$, якщо $f(x) = \overline{2} + \left(x^2 - \overline{6}x + \overline{5}\right)(x^5 + \overline{3}x^4 - \overline{2}x^3 + x^2 - x) +$
$+(x^2 - \overline{3}x + \overline{1})(x^3 + \overline{5}x + \overline{2})$.

Розв'язання.

Сума коефіцієнтів дорівнює значенню многочлена при $x = 1$.

$f(\overline{1}) = \overline{2} + \left(\overline{1} - \overline{6} + \overline{5}\right)(\overline{1} + \overline{3} - \overline{2} + \overline{1} - \overline{1}) + (\overline{1} - \overline{3} + \overline{1})(\overline{1} + \overline{5} + \overline{2}) = \overline{2} - \overline{8} =$
$= -\overline{6} = \overline{1}$.

Приклад 5. Чи є кільцем множина *K* всіх многочленів з кільця $Z[x]$, які не містять вільного члена?

Розв'язання.

Нехай $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x$,

$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x$ і $m \geq n$.

Тоді $f(x) + g(x) = b_m x^m + \ldots + (a_n + b_n)x^n + \ldots + (a_1 + b_1)x$,

$f(x) - g(x) = -b_m x^m + \ldots + (a_n - b_n)x^n + \ldots + (a_1 - b_1)x$,

$f(x) \cdot g(x) = a_n b_m x^{n+m} + \ldots + a_1 b_1 x^2$.

Це означає, що $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ також не містять вільних членів, тобто є елементами множини *K*. Отже, *K* є підкільцем кільця $Z[x]$.

1.2. Теорія подільності многочленів. НСД і НСК многочленів

Теорема 1. Довільний многочлен $f(x)\in P[x]$ ділиться з остачею на будь–який многочлен $g(x)\in P[x]$, $g(x)\neq 0$; при цьому частка $s(x)$ і остача $r(x)$ також належать $P[x]$ і визначаються однозначно, тобто

$$f(x)=g(x)s(x)+r(x),$$

причому $r(x)=0$ або $\deg r(x)<\deg g(x)$, де $f(x)$ – *ділене*, $g(x)$ – *дільник*, $s(x)$ – *частка*, $r(x)$ – *остача*.

Теорема 2. Кільце $P[x]$ многочленів над полем P є евклідове кільце.

Для знаходження частки і остачі від ділення многочлена $f(x)$ на $g(x)$ над полем P використовують різні методи: ділення "кутом", метод невизначених коефіцієнтів, табличні схеми.

Теорема 3 (Безу). Для будь–якого елемента α з поля P остача при діленні многочлена $f(x)\in P[x]$ на $x-\alpha$ дорівнює $f(\alpha)$.

Розкласти многочлен $f(x)$ *за степенями* $x-\alpha$ означає представити його у вигляді:

$$f(x)=c_n(x-\alpha)^n+c_{n-1}(x-\alpha)^{n-1}+c_1(x-\alpha)+c_0.$$

Це зручно робити за схемою Горнера, де $c_1,c_2,\ldots,c_n$ являються частками при послідовному діленні многочлена $f(x)$ на $x-\alpha$.

Означення. Многочлен $f(x)\in P[x]$ *ділиться націло на* $g(x)\in P[x]$ (записується $f(x)\vdots g(x)$), якщо остача $r(x)$ при діленні $f(x)$ на $g(x)$ дорівнює нулю, тобто якщо існує многочлен $s(x)\in P[x]$ такий, що $f(x)=g(x)s(x)$.

Властивості подільності многочленів:

1) $\forall\ f(x),g(x),h(x)\in P[x]$

$$\left[f(x)\vdots g(x)\wedge g(x)\vdots h(x)\Rightarrow f(x)\vdots h(x)\right];$$

2) $\forall\ f(x), g(x), h(x) \in P[x]$

$$\left[\, f(x) \vdots h(x) \wedge g(x) \vdots h(x) \Rightarrow \left(f(x) \pm g(x) \right) \vdots h(x) \right];$$

3) $\forall\ f(x), h(x) \in P[x]$

$$\left[\, f(x) \vdots h(x) \Rightarrow \forall g(x) \in P[x] \quad f(x) g(x) \vdots h(x) \right];$$

4) $\forall\ f_1(x), \ldots, f_m(x) \in P[x]$

$$\left[f_1(x) \vdots h(x) \wedge \ldots \wedge f_m(x) \vdots h(x) \Rightarrow \ \forall g_1(x), \ldots, g_m(x) \in P[x] \right.$$
$$\left. \left(f_1(x) g_1(x) + \ldots + f_m(x) g_m(x) \right) \vdots h(x) \right];$$

5) $\forall\ f(x), g(x) \in P[x] \quad \forall c \in P \setminus \{0\} \ \left[f(x) \vdots c \right];$

6) $\forall\ f(x), g(x) \in P[x] \quad \forall c \in P \setminus \{0\} \ \left[f(x) \vdots g(x) \Rightarrow f(x) \vdots cg(x) \right].$

Означення. У кільці $P[x]$ многочлени $f(x)$ і $g(x)$ *асоційовані*, якщо вони відрізняються лише множником, який є відмінною від нуля константою:

$$f(x) = cg(x) \ \text{ або } \ \mathrm{g}(\mathrm{x}) = \frac{1}{c} \cdot f(x) = c^{-1} \cdot f(x).$$

Означення. Якщо многочлен $d(x)$ є дільником многочлена $f(x)$ і многочлена $g(x)$, то він називається *спільним дільником* $f(x)$ і $g(x)$.

Означення. Спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$, який ділиться на кожен інший спільний дільник $f(x)$ і $g(x)$, називається *найбільшим спільним дільником (НСД)*. Позначається $\left(f(x), g(x) \right)$.

Означення. Многочлени $f(x), g(x) \in P[x]$ називаються *взаємно простими*, якщо їх спільний дільник є многочленом нульового степеня: $\left(f(x), g(x) \right) = 1$.

Теорема 4. Для будь–яких двох многочленів $f(x), g(x) \in P[x]$ існує найбільший спільний дільник $d(x)$, причому $d(x)$ можна подати у вигляді:

$$d(x) = f(x) U(x) + g(x) V(x),$$

де $U(x)$ і $V(x)$ – деякі многочлени з $P[x]$.

Таке представлення називається *лінійним представленням НСД*.

Наслідок. Многочлени $f(x), g(x) \in P[x]$ взаємно прості тоді і тільки тоді, коли існують многочлени $U(x), V(x) \in P[x]$ такі, що

$$f(x)U(x) + g(x)V(x) = 1.$$

Властивості взаємно простих многочленів:

1) $\forall\, f(x), g(x), h(x) \in P[x]$

$$\left[(f(x), g(x)) = 1 \wedge (f(x), h(x)) = 1 \Rightarrow (f(x), g(x)h(x)) = 1\right];$$

2) $\forall\, f(x), g(x), h(x) \in P[x]$

$$\left[f(x)g(x) \vdots h(x) \wedge (f(x), h(x)) = 1 \Rightarrow g(x) \vdots h(x)\right];$$

3) $\forall\, f(x), g(x), h(x) \in P[x]$

$$\left[f(x) \vdots g(x) \wedge f(x) \vdots h(x) \wedge (g(x), h(x)) = 1 \Rightarrow f(x) \vdots g(x)h(x)\right].$$

Для знаходження найбільшого спільного дільника двох многочленів використовують *алгоритм Евкліда*.

Нехай дано многочлени $f(x)$ і $g(x)$, причому $\deg f(x) \geq \deg g(x)$. Виконаємо послідовне ділення з остачею:

$$\begin{aligned}
&f(x) = g(x)s_1(x) + r_1(x),\\
&g(x) = r_1(x)s_2(x) + r_2(x),\\
&r_1(x) = r_2(x)s_3(x) + r_3(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x)s_n(x) + r_n(x),\\
&r_{n-1}(x) = r_n(x)s_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

Остання, відмінна від нуля, остача $r_n(x)$ у цій системі рівностей і є НСД многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

Властивості НСД:

1) Будь–які многочлени $f(x)$ і $g(x)$ мають тривіальні НСД – дільники одиниці кільця $P[x]$;

2) Якщо $d(x)$ – НСД многочленів $f(x)$ і $g(x)$, то $\forall c \neq 0$ і $cd(x)$ – теж НСД многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

3) Якщо $d(x)$ і $d_1(x)$ – НСД многочленів $f(x)$ і $g(x)$, то $d(x) \vdots d_1(x)$, бо $d(x)$ – НСД, а $d_1(x) \vdots d(x)$, бо $d_1(x)$ – НСД. Тоді $d(x)$ і $d_1(x)$ – асоційовані, тобто $d_1(x) = cd(x)$, де $c = const,\ c \neq 0$.

Зауваження: НСД можна обчислювати з точністю до сталого множника.

Означення. *Спільним кратним многочленів* $f(x), g(x) \in P[x]$ називають будь–який многочлен $s(x) \in P[x]$ такий, що

$$s(x) \vdots f(x) \wedge s(x) \vdots g(x).$$

Означення. *Найменшим спільним кратним (НСК)* многочленів $f(x)$ і $g(x)$ називається їх спільне кратне, на яке ділиться кожне спільне кратне цих многочленів. Позначається $[f(x), g(x)]$.

Теорема 5. Для будь–яких відмінних від нуля многочленів $f(x)$ і $g(x)$ найменше спільне кратне існує і визначається однозначно з точністю до сталого множника:

$$[f(x), g(x)] = \frac{f(x)g(x)}{(f(x), g(x))}.$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Знайти необхідні і достатні умови подільності многочлена $f(x) = x^3 + bx + c$ на $g(x) = x^2 + 1$.

Розв'язання.

Необхідною і достатньою умовою подільності многочленів є рівність остачі нулю. Тому запишемо основну теорему алгебри для даних многочленів:

$f(x) = g(x)s(x) + r(x)$, тоді

$$x^3 + bx + c = x^3 + x - x + bx + c = \underbrace{\left(x^2+1\right)}_{g(x)}\underbrace{x}_{s(x)} + \underbrace{(b-1)x + c}_{r(x)}.$$

З умови, що остача дорівнює нулю $r(x)=(b-1)x+c=0$,

отримаємо систему: $\begin{cases} b-1=0, \\ c=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1, \\ c=0. \end{cases}$

Отже, $f(x) \vdots g(x)$ при $b=1, c=0$.

Приклад 2. Виконати ділення многочлена $f(x)=4x^5-6x^3+2x^2-4$ на многочлен $g(x)=2x^2-5x+1$ в кільці $Q[x]$.

Розв'язання.

Виконаємо ділення «кутом» двох многочленів.

$$\begin{array}{r|l} -\;4x^5-6x^3+2x^2-4 & 2x^2-5x+1 \\ \underline{4x^5-10x^4+2x^3} & 2x^3+5x^2+\frac{17}{2}x+\frac{79}{4}=s(x) \\ -\;10x^4-8x^3+2x^2 & \\ \underline{10x^4-25x^3+5x^2} & \\ -\;17x^3-3x^2-4 & \\ \underline{17x^3-\frac{85}{2}x^2+\frac{17}{2}x} & \\ -\;\frac{79}{2}x^2-\frac{17}{2}x-4 & \\ \underline{\frac{79}{2}x^2-\frac{395}{4}x+\frac{79}{4}} & \\ \frac{361}{4}x-\frac{95}{4}=r(x) & \end{array}$$

Оскільки $f(x)=g(x)\cdot s(x)+r(x)$, то

$$4x^5-6x^3+2x^2-4=(2x^2-5x+1)\left(2x^3+5x^2+\frac{17}{2}x+\frac{79}{4}\right)++\frac{361}{4}x-\frac{95}{4}.$$

Приклад 3. Поділити з остачею многочлен $f(x)=4x^4+x^3$ на двочлен $g(x)=x+1+i$ трьома способами.

Розв'язання.

1 спосіб. Поділимо многочлен $f(x)$ на двочллен $x-\alpha$ “кутом”:

$$
\begin{array}{l|l}
-\,4x^4+x^3 & x+1+i \\
\quad 4x^4+(4+4i)x^3 & \overline{4x^3-(3+4i)x^2+(7i-1)x+8-6i=s(x)} \\
\hline
\qquad -\,-(3+4i)x^3 & \\
\qquad\quad -(3+4i)x^3-(1+i)(3+4i)x^2 & \\
\hline
\qquad\qquad -\,(7i-1)x^2 & \\
\qquad\qquad\quad (7i-1)x^2+(1+i)(7i-1)x & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad -\,(8-6i)x & \\
\qquad\qquad\qquad\quad (8-6i)x+(1+i)(8-6i) & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -2i-14=r(x) &
\end{array}
$$

2 спосіб. Поділимо многочлен $f(x)$ на двочллен $x-\alpha$ методом невизначених коефіцієнтів, використовуючи основну терему алгебри многочленів:

$$4x^4+x^3=(x+1+i)s(x)+r(x),\ \deg s(x)\le 3,\ \deg r(x)<2,$$

тому

$$s(x)=A_3x^3+A_2x^2+A_1x+A_0,$$
$$r(x)=B_1x+B_0,$$
$$4x^4+x^3=(x+1+i)\left(A_3x^3+A_2x^2+A_1x+A_0\right)+\left(B_1x+B_0\right).$$

З алгебраїчної рівності многочленів маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} A_3=4, \\ A_2+(1+i)A_3=1, \\ A_1+(1+i)A_2=0, \\ A_0+(1+i)A_1=0, \\ B_0+(1+i)A_0=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} A_3=4, \\ A_2=-3-4i, \\ A_1=7i-1, \\ A_0=8-6i, \\ B_0+(1+i)A_0=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} A_3=4, \\ A_2=-3-4i, \\ A_1=7i-1, \\ A_0=8-6i, \\ B_0=-2i-14. \end{cases}$$

Тому $s(x)=4x^3-(3+4i)x^2+(7i-1)x+8-6i$, $r(x)=-2i-14$.

3 спосіб. Поділимо многочлен $f(x)$ на двочллен $x-\alpha$ за схемою Горнера $\alpha=-1-i$:

Робоча стрічка	4	1	0	0	0
$-1-i$	4	$-3-4i$	$7i-1$	$-6i+8$	$-2i-14=$ $r(x)$
	A_3	**A_2**	**A_1**	**A_0**	**B_0**

Приклад 4. Розкласти многочлен $f(x)=\overline{2}x^4+x^3+x^2+\overline{2}$ за степенями $(x-\overline{1})$ в кільці $Z_3[x]$.

Розв'язання.

Виконаємо послідовне ділення многочлена $f(x)$ на двочлен $(x-\overline{1})$, використовуючи схему Горнера:

	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}=\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}=C_0$
$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}=C_1$	
$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{4}=\overline{1}$	$\overline{1}=C_2$		
$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}=C_3$			
$\overline{1}$	$\overline{2}=C_4$				

Маємо $f(x)=\overline{2}(x-\overline{1})^4+(x-\overline{1})^2+(x-\overline{1})$.

Приклад 5. Знайти остачу від ділення $f(x)=x^{1982}+x^{991}+1$ на $g(x)=x^2-1$ у кільці $Z[x]$.

Розв'язання.

Для многочленів $f(x)$ і $g(x)$ в кільці $Z[x]$ застосуємо теорему про ділення з остачею. Тоді існують такі многочлени $s(x)$ і $r(x)$, що $f(x)=g(x)s(x)+r(x)$ і $\deg r(x)<2$, звідки $r(x)=ax+b$.

Тому можемо записати таку рівність:

$x^{1982}+x^{991}+1=(x^2-1)s(x)+ax+b$.

Враховуючи, що $g(-1)=g(1)=0$, то підставивши ці значення замість x у рівність матимемо:

$$\begin{cases} a+b=3, \\ -a+b=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1, \\ b=2. \end{cases}$$

Отже, $r(x)=x+2$.

Приклад 6. При діленні многочлена $f(x)$ на $g(x)$ в кільці $Z[x]$ отримали остачу $r(x)=3x^2-4x+1$. Знайти остачу від ділення $(f(x))^2$ на $g(x)$, якщо $\deg g=5$.

Розв'язання.

За теоремою про ділення з остачею існують многочлени $s(x)$ і $r(x)$ такі, що $f(x)=g(x)s(x)+r(x)$.

Піднесемо рівність до квадрату:

$$(f(x))^2=(g(x)s(x)+r(x))^2=g^2(x)s^2(x)+2g(x)s(x)r(x)+r^2(x)=$$
$$=g(x)\big(g(x)s^2(x)+2s(x)r(x)\big)+r^2(x).$$

Звідки зрозуміло, що при діленні многочлена $(f(x))^2$ на $g(x)$ отримали частку та остачу: $s_1(x)=g(x)s^2(x)+2s(x)r(x)$, $r_1(x)=r^2(x)=(3x^2-4x+1)^2$.

Приклад 7. Знайти такі значення a і b, при яких многочлен $f(x)=x^5-a^2x^2+bx+1$ ділиться на двочлени $g_1(x)=x-1$ і $g_2(x)=x+1$ у кільці $R[x]$.

Розв'язання.

За теоремою Безу маємо:

$f(1)=1-a^2+b+1=0,$

$f(-1)=-1-a^2-b+1=0.$

Отримаємо систему: $\begin{cases} -a^2+b=-2, \\ -a^2-b=0. \end{cases}$ Отже, $\begin{cases} a=\pm 1, \\ b=-1. \end{cases}$

Приклад 8. Остачі від ділення многочленів $f_1(x)$ та $f_2(x)$ на $g(x)$ в кільці $Q[x]$ відповідно дорівнюють $r_1(x)=-2x+\dfrac{2}{3}$ та

$r_2(x) = x^2 + 3x - 1$. Знайти остачу від ділення многочлена $f(x) = 3f_1(x) + 2f_2(x)$ на $g(x)$.

Розв'язання.

За теоремою про ділення з остачею маємо:

$f_1(x) = g(x)s_1(x) + r_1(x),$

$f_2(x) = g(x)s_2(x) + r_2(x).$

Запишемо умову задачі згідно цих розкладів:

$$f(x) = 3\left(g(x)s_1(x) + r_1(x)\right) + 2\left(g(x)s_2(x) + r_2(x)\right) =$$

$$= 3g(x)s_1(x) + 3r_1(x) + 2g(x)s_2(x) + 2r_2(x) =$$

$$= \underbrace{3g(x)s_1(x)}_{\vdots g(x)} + 3r_1(x) + 2\underbrace{g(x)s_2(x)}_{\vdots g(x)} + 2r_2(x)$$

Звідси отримаємо шукану остачу:

$$r(x) = 3r_1(x) + 2r_2(x) = 3\left(-2x + \frac{2}{3}\right) + 2(x^2 + 3x - 1) =$$

$$= -6x + 2 + 2x^2 + 6x - 2 = 2x^2.$$

Приклад 9. Остачі від ділення многочлена $f(x)$ з кільця $Z[x]$ на $g_1(x) = x - 1$, $g_2(x) = x - 2$ і $g_3(x) = x + 1$ відповідно дорівнюють 3, 15 і 0. Знайти остачу при діленні цього многочлена на $g(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Розв'язання.

Запишемо многочлен $f(x)$ за теоремою про ділення з остачею у вигляді $f(x) = g(x)s(x) + r(x)$ для кожного $g_i(x)$:

$f(x) = (x-1)s_1(x) + 3,$

$f(x) = (x-2)s_2(x) + 15,$

$f(x) = (x+1)s_3(x) + 0,$

а многочлен $g(x) = g_1(x)g_2(x)g_3(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Тоді маємо $f(x) = g_1(x)g_2(x)g_3(x)s(x) + r(x)$, де $\deg r < 3$,

тому $r(x) = ax^2 + bx + c$.

Звідси $f(x) = (x-1)(x-2)(x+1) + ax^2 + bx + c$.

Згідно теореми Безу:

$$f(1)=a+b+c \qquad \begin{cases} a+b+c=3 \\ 4a+2b+c=15 \\ -a+b-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{7}{2} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ c=-2 \end{cases}$$
$$f(2)=4a+2b+c$$
$$f(-1)=-a+b-c$$

Отже, $r(x)=3{,}5x^2+1{,}5x-2$.

Приклад 10. Многочлен $f(x)$ з кільця $C[x]$ ділиться на $g_1(x)=x+1$, при діленні на $g_2(x)=x-1$ цей многочлен дає остачу 2, а при діленні на $g_3(x)=x-i$ дає остачу $-i$. Знайти остачу від ділення многочлена $f(x)$ на $g(x)=(x^2-1)(x-i)$.

Розв'язання.

За теоремою про ділення з остачею отримаємо такі рівності:

$$f(x)=(x+1)s_1(x)+0,$$
$$f(x)=(x-1)s_2(x)+2,$$
$$f(x)=(x-i)s_3(x)-i.$$

Невідому остачу запишемо у вигляді $r(x)=ax^2+bx+c$, $\deg r(x)<3$.

За теоремою Безу:

$$f(-1)=a-b+c \qquad \begin{cases} a-b+c=0 \\ a+b+c=2 \\ -a+bi+c=-i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2}+i \\ b=1 \\ c=\dfrac{1}{2}-i \end{cases}$$
$$f(1)=a+b+c$$
$$f(i)=-a+bi+c$$

Тоді, $r(x)=\left(\dfrac{1}{2}+i\right)x^2+x+\left(\dfrac{1}{2}-i\right)$.

Приклад 11. Довести, що $f(x)=(\cos\alpha - x\sin\alpha)^n - \cos nx + x\sin nx$ ділиться на $g_1(x)=x+i$ і на $g_2(x)=x-i$ в кільці $C[x]$ для всіх $n\in N,\ \alpha\in R$.

Розв'язання.

За теоремою Безу та формулою Муавра маємо:

$$f(-i)=\left(\cos(-i)+i\sin(-i)\right)^n-\cos(-in)-i\sin(-ni)=$$

$$=\cos(-in)+i\sin(-in)-\cos(-in)-i\sin(-in)=0$$

$$f(i)=\left(\cos(i)+i\sin(i)\right)^n-\cos(in)-i\sin(ni)=$$

$$=\cos(in)+i\sin(in)-\cos(in)-i\sin(in)=0.$$

Отже, $f(x)=(\cos\alpha - x\sin\alpha)^n - \cos nx + x\sin nx$ ділиться на $g_1(x)=x+i$ та $g_2(x)=x-i$ в кільці $C[x]$ для всіх $n\in N$ і $\alpha\in R$.

Приклад 12. Не застосовуючи алгоритм Евкліда, знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)=2x^3+x^2+4x+2$, $g(x)=2x^3+x^2+6x+3$.

Розв'язання.

Розглянемо многочлен:

$s(x)=f(x)-g(x)=\left(2x^3+x^2+4x+2\right)-\left(2x^3+x^2+6x+3\right)=$ $=-2x-1$. З властивостей подільності та означення найбільшого спільного дільника многочленів маємо $(f(x),g(x))=(s(x),g(x))$. Оскільки $g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, то за теоремою Безу $g(x)\,\vdots\,s(x)$. Тому $(f(x),g(x))=s(x)=-2x-1$.

Приклад 13. Знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ і $g(x)=5x^3+4x^2+3x+2$.

Розв'язання.

1) Поділимо многочлен $f(x)$ на $g(x)$ (щоб уникнути дробів домножимо $f(x)$ на 5):

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+x^3+x^2+x+1 & \\
-\;5x^4+5x^3+5x^2+5x+5 & 5x^3+4x^2+3x+2 \\
\underline{5x^4+4x^3+3x^2+2x} & \overline{x+1=s_1(x)} \text{ – частка} \\
x^3+2x^2+3x+5 & \\
-\;5x^3+10x^2+15x+25 & \\
\underline{5x^3+4x^2+3x+2} & \\
6x^2+12x+23=r_1(x) \text{ – остача} &
\end{array}
$$

Отже, $r_1(x)=6x^2+12x+23$.

2) Поділимо многочлен $g(x)$ на $r_1(x)$ (щоб уникнути дробів домножимо $g(x)$ на 6):

$$
\begin{array}{l|l}
5x^3+4x^2+3x+2 & \\
-\;30x^3+24x^2+18x+12 & 6x^2+12x+23 \\
\underline{30x^3+60x^2+115x} & \overline{5x-6=s_2(x)} \text{ – частка} \\
-\;-36x^2-97x+12 & \\
\underline{-36x^2-72x-138} & \\
-25x+150=r_2(x) \text{ – остача (поділимо на –25)} &
\end{array}
$$

Отже, $r_2(x)=-x+6$.

3) Поділимо многочлен $r_1(x)$ на $r_2(x)$:

$$
\begin{array}{l|l}
-\;6x^2+12x+23 & -x+6 \\
\underline{6x^2-36x} & \overline{-6x-48=s_3(x)} \text{ – частка} \\
-\;48x+23 & \\
\underline{48x-288} & \\
311 \;:311 & \\
1=r_3(x) \text{ – остача} &
\end{array}
$$

Отже, $r_3(x)=1$.

4) Оскільки $r_3(x)=1$, то $(f(x),g(x))=1$, тобто многочлени $f(x)$ та $g(x)$ взаємнопрості.

Приклад 14. Знайти найменше спільне кратне многочленів $f(x)=x^4-4x^3+4x^2-5x-2,\ g(x)=x^2-x+2$.

Розв'язання.

Для відшукання найменшого спільного кратного многочленів скористаємося формулою $[f,g]=\dfrac{f\cdot g}{(f,g)}$.

Спочатку знайдемо НСД многочленів $f(x)$ і $g(x)$, виконавши ділення $f(x)$ на $g(x)$ «кутом»:

$$\begin{array}{r|l}
-\ x^4-4x^3+4x^2-5x-2 & x^2-x+2 \\
\underline{x^4-x^3+2x^2\qquad\qquad} & \overline{x^2-3x-1} \\
-\ -3x^3+2x^2-5x & \\
\underline{-3x^3+3x^2-6x} & \\
-\ -x^2+x-2 & \\
\underline{-x^2+x-2} & \\
0 &
\end{array}$$

Звідси маємо, що НСД $f(x)$ і $g(x)$ дорівнює: $(f,g)=x^2-x+2$.

Обчислюємо НСК:

$$[f,g]=\frac{(x^4-4x^3+4x^2-5x-2)(x^2-x+2)}{(x^2-x+2)}=x^4-4x^3+4x^2-5x-2.$$

Приклад 15. Визначити многочлени $u(x)$ і $v(x)$ так, щоб для многочленів $f(x)$ і $g(x)$ виконувалася рівність $f(x)u(x)+g(x)v(x)=(f,g)$, якщо $f(x)=x^3+\overline{3}x^2+\overline{2}x+\overline{2}$ і $g(x)=x^3+\overline{2}x^2+x+\overline{2}$.

Розв'язання.

Застосуємо алгоритм Евкліда до многочленів $f(x)$ і $g(x)$:

1) $$\begin{array}{r|l}
f(x)=x^3+\overline{3}x^2+\overline{2}x+\overline{2} & x^3+\overline{2}x^2+x+\overline{2}=g(x) \\
\underline{x^3+\overline{2}x^2+x+\overline{2}} & \overline{\overline{1}=s_1(x)} \\
x^2+x+\overline{4}=r_1(x) &
\end{array}$$

Кожен етап ділення записуємо в лінійній формі:

$$f(x)=g(x)s_1(x)+r_1(x)\ \Rightarrow\ r_1(x)=f(x)-g(x)s_1(x).$$

2) $g(x)=x^3+\overline{2}x^2+x+\overline{2}$ $\quad\Big|\ \dfrac{x^2+x+\overline{4}=r_1(x)}{x+\overline{1}=s_2(x)}$

$$\begin{array}{r} x^3+\overline{2}x^2+\overline{4}x \\ \hline -\ x^2+\overline{2}x+\overline{2} \\ x^2+x+\overline{4} \\ \hline x+\overline{3}=r_2(x) \end{array}$$

$$g(x)=r_1(x)s_2(x)+r_2(x) \Rightarrow r_2(x)=g(x)-r_1(x)s_2(x).$$

3) $r_1(x)=x^2+x+\overline{4}$ $\quad\Big|\ \dfrac{x+\overline{3}=r_2(x)}{x+\overline{3}=s_3(x)}$

$$\begin{array}{r} x^2+\overline{3}x \\ \hline -\ \overline{3}x+\overline{4} \\ \overline{3}x+\overline{9} \\ \hline 0=r_3(x) \end{array}$$

$$r_1(x)=r_2(x)s_3(x).$$

За алгоритмом Евкліда остача $r_2(x)=x+3$ буде НСД многочленів $(f(x),g(x))$. Виразимо $r_2(x)$ через $f(x)$ та $g(x)$:

$$r_2(x)=g(x)-r_1(x)s_2(x)=g(x)-\big(f(x)-g(x)s_1(x)\big)s_2(x)=$$
$$=g(x)-f(x)s_2(x)+g(x)s_1(x)s_2(x)=$$
$$=f(x)\big(-s_2(x)\big)+g(x)\big(1+s_1(x)s_2(x)\big)$$

Звідси $u(x)=-s_2(x)=-x-\overline{1}$,

$$v(x)=1+s_1(x)s_2(x)=\overline{1}+\left(x+\overline{1}\right)=x+\overline{2}.$$

1.3. Незвідні многочлени

Означення. Многочлен $f(x) \in P[x]$ називається *незвідним (нерозкладним, простим)* у полі P, якщо він не є константою і не має дільників, відмінних від константи і від многочлена виду $c \cdot f(x)$, де c – константа.

Многочлен виду $c \cdot f(x)$ є асоційованим з многочленом $f(x)$.

Означення. Многочлен $f(x) \in P[x]$ називається *звідним (складеним)* у полі P, якщо $\deg f(x) \geq 1$ і в кільці $P[x]$ існують многочлени $f(x)$ і $g(x)$ такі, що $f(x) = g(x)s(x)$, причому $\deg g(x) \geq 1$ і $\deg s(x) \geq 1$.

Приклади:

1) Многочлен $f(x) = x^2 + x - 6$ звідний над Z, бо $f(x) = (x-2)(x+3)$.

2) Многочлен $g(x) = x^2 - 4x + 2$ незвідний над Z та R, бо цілих коренів немає ($x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$).

3) Многочлен $\varphi(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x + 2$ звідний над Q, бо $f(x) = (x+2)(x^3 - 3x + 1)$.

4) Многочлен $p(x) = x^2 + x + 1$ незвідний над Q, бо $D < 0$.

Теорема 6. Кожен многочлен другого степеня звідний над C.

Теорема 7. Многочлени першого степеня над будь–яким полем $P[x]$ є незвідними у кільці $P[x]$.

Властивості незвідних многочленів над полем $P[x]$:

1) Якщо многочлен $p(x)$ є незвідним над полем $P[x]$, то для кожного $c \in P[x] \setminus \{0\}$ многочлен $c \cdot p(x)$ також незвідний над $P[x]$.

2) Якщо многочлен $p(x)$ є незвідним над полем $P[x]$, то для будь–якого многочлена $f(x)$ з кільця $P[x]$: $f(x)\vdots p(x)$ або $\left(p(x), f(x)\right)$ =1.

3) Якщо незвідний многочлен $p(x)$ над полем $P[x]$ ділиться на незвідний многочлен $g(x)\in P[x]$, то ці многочлени відрізняються тільки сталим множником.

Теорема 8. Кожний многочлен $f(x)$ ненульового степеня над полем $P[x]$ можна подати у вигляді

$$f(x)=p_1(x)\,p_2(x)....p_m(x), \qquad (1)$$

де всі $p_k(x)$ є незвідними многочленами у полі $P[x]$. Зображення (1) єдине з точністю до сталих множників і до порядку нумерації многочленів $p_k(x)$.

Зображення (1) називається *розкладом многочлена* $f(x)$ на незвідні множники у полі $P[x]$.

Наслідок. Довільний многочлен ненульового степеня над полем $P[x]$ можна подати у вигляді:

$$f(x)=\left(p_1(x)\right)^{k_1}\left(p_2(x)\right)^{k_2}...\left(p_m(x)\right)^{k_m}, \qquad (2)$$

де $p_k(x)$– попарно різні (неасоційовні) многочлени, незвідні у полі $P[x]$. Це зображення єдине з точністю до сталих множників і їх нумерації.

Зображення (2) називається *канонічним розкладом многочлена* $f(x)$ у полі $P[x]$.

Означення. Якщо многочлен $p_j(x)$ входить у канонічний розклад (2) у степені з показником k_j, то кажуть, що $p_j(x)$ є *множником кратності* k_j многочлена $f(x)$. Множники, кратність яких більша за 1, називаються *кратними множниками многочлена.*

Кожний спільний дільник двох многочленів $f(x)$ і $g(x)$ над полем P може мати тільки такі незвідні множники в цьому полі, які є незвідними множниками як многочлена $f(x)$, так і многочлена $g(x)$.

Теорема 9. Якщо многочлени $f(x)$ і $g(x)$ розкладені на незвідні множники у довільному полі P, то найбільший спільний дільник (f,g) дорівнює добутку всіх незвідних множників, які входять у розклад як $f(x)$, так і $g(x)$. Якщо таких незвідних множників немає, то (f,g) =1.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Довести, що многочлен $f(x)=x^2+x-1$ незвідний в Q.

Розв'язання.

Многочлен $f(x)$ є звідним у полі Q, якщо його можна розкласти в добуток не менше як двох многочленів ненульового степеня з кільця $Q[x]$. Знайдемо дискримінант відповідного рівняння $x^2+x-1=0$: $D=1-4\cdot 1=-3<0$, тому рівняння коренів немає і в полі Q цей многочлен незвідний.

Приклад 2. Довести, що многочлен $f(x)=x^3-1$ звідний у полі *Z*.

Розв'язання.

Якщо многочлен звідний у полі *Z*, то його можна розкласти на добуток не менше як двох многочленів ненульового степеня з кільця *Z*[x].

Щоб розкласти многочлен $f(x)$ на множники, застосуємо метод невизначених коефіцієнтів. При цьому розглянемо єдиний випадок можливого розкладу: один множник першого степеня, а другий множник другого степеня.

Нехай $f(x)=(ax+b)(cx^2+dx+n)$. Розкривши дужки, з рівності многочленів $x^3-1=ax^3+(ad+bc)x^2+(an+bd)x+bn$ маємо систему:

$$\begin{cases} ac = 1, \\ ad + bc = 0, \\ an + bd = 0, \\ bn = -1. \end{cases}$$

Розв′язуючи цю систему, з першого рівняння маємо, що $a = c = \pm 1$, а з останнього: $b = -1,\ c = 1$ або $b = 1,\ c = -1$. Розглянемо кожну з чотирьох отриманих систем:

$$1)\begin{cases} a = 1, \\ c = 1, \\ b = -1, \\ n = 1, \\ d = 1, \\ d = 1, \end{cases} \quad 2)\begin{cases} a = -1, \\ c = -1, \\ b = -1, \\ n = 1, \\ d = 1, \\ d = -1, \end{cases} \quad 3)\begin{cases} a = 1, \\ c = 1, \\ b = 1, \\ n = -1, \\ d = -1, \\ d = 1, \end{cases} \quad 4)\begin{cases} a = -1, \\ c = -1, \\ b = 1, \\ n = -1, \\ d = -1, \\ d = -1. \end{cases}$$

Бачимо, що сумісними є дві системи: 1) і 4), тому маємо два розв′язки: $f(x) = (x-1)(x^2 + x + i)$ або $f(x) = (-x+1)(-x^2 - x - 1)$.

Приклад 3. Чи є звідним многочлен $f(x) = x^4 + 4$ в таких полях: а) Z_5; б) Q; в) R; г) C?

Розв'язання.

а) $f(x) = x^4 + 4 = x^4 - \overline{1} = (x^2 - \overline{1})(x^2 + \overline{1}) \Rightarrow$ многочлен звідний над полем Z_5;

б) $f(x) = x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 =$

$= (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x) \Rightarrow$ многочлен звідний над полем Q;

в) $f(x) = x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 =$

$= (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x) \Rightarrow$ многочлен звідний над полем R;

г) $f(x) = x^4 + 4 = x^4 - 4i^2 = (x^2 - 2i)(x^2 + 2i) \Rightarrow$ многочлен звідний над полем C.

Приклад 4. Розкласти на незвідні множники многочлен $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1$ в полі R.

Розв'язання.

Винесемо x^2 за дужки та в дужках виділимо повний квадрат:

$$f\left(x\right)=x^2\left(x^2-6x+11-6\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left(\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-6\left(x+\frac{1}{x}\right)+11\right)=$$

$$=x^2\left(\frac{x^4+1}{x^2}-\left(\frac{x^2+1}{x}\right)+11\right)=x^2\left(\frac{x^4+2x^2+1-2x^2}{x^2}-6\frac{x^2+1}{x}+11\right)=$$

$$=x^2\left(\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2-6\frac{x^2+1}{x}+9\right).$$

Нехай $\frac{x^2+1}{x}=t$, тоді $t^2-6t+9=(t-3)^2$,

$$f(x)=x^2\left(\frac{x^2+1}{x}-3\right)^2=\left(x^2-3x+1\right)^2=\left(x+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Отримали розклад многочлена на незвідні множники.

Приклад 5. Розкласти многочлен $f(x)=\overline{2}x^3+\overline{3}x^2+\overline{3}x+\overline{2}$ на незвідні множники в полі $Z_5[x]$, якщо відомо, що цей многочлен має два корені, які є протилежними елементами в $Z_5[x]$.

Розв'язання.

В $Z_5[x]$ є такі елементи: $Z_5=\left\{-\overline{4},-\overline{3},-\overline{2},-\overline{1},\overline{0}\right\}$. Оскільки $\left(-\overline{1}+\left(-\overline{4}\right)=-\overline{5}=\overline{0}\right)$, то протилежними коренями є $x_1=-\overline{4},\ x_2=-\overline{1}$.

Так як $f(x)$ многочлен третього степеня, то

$$f\left(x\right)=\left(x+\overline{1}\right)\left(x+\overline{4}\right)\left(\overline{a}x+\overline{b}\right)=\overline{a}x^3+\overline{4}\overline{a}x^2+\overline{a}x^2+\overline{4}\overline{a}x+\overline{b}x^2+\overline{4}\overline{b}x+$$

$$+\overline{b}x+\overline{4}\overline{b}=\overline{a}x^3+x^2\left(\overline{4}\overline{a}+\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{x}\left(\overline{4}\overline{a}+\overline{4}\overline{b}+\overline{b}\right)+\overline{4}\overline{b}.$$

Прирівнюємо відповідні коефіцієнти:

$$\begin{cases}\overline{4}\overline{a}+\overline{a}+\overline{b}=\overline{3},\\ \overline{4}\overline{a}+\overline{4}\overline{b}+\overline{b}=\overline{3},\\ \overline{4}\overline{b}=\overline{2},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overline{a}=\overline{2},\\ \overline{b}=\overline{3}.\end{cases}$$

Тому $f(x)=\left(x+\overline{1}\right)\left(x+\overline{4}\right)\left(\overline{2}x+\overline{3}\right)$.

1.4. Корені многочленів. Похідна від многочлена. Відокремлення кратних множників

Означення. *Коренем многочлена* $f(x) \in P[x]$ називається елемент α будь–якого розширення поля P такий, що $f(\alpha) = 0$.

Теорема 1. Елемент $\alpha \in P$ є коренем многочлена $f(x) \in P[x]$ тоді і тільки тоді, коли лінійний двочлен $x - \alpha$ є дільником многочлена $f(x)$.

Означення. Елемент $\alpha \in P$ називається *коренем многочлена* $f(x) \in P[x]$, якщо $f(x)$ ділиться на $x - \alpha$.

Означення. Елемент $\alpha \in P$ називається *k–кратним коренем* (або коренем *k*–ї кратності) многочлена $f(x) \in P[x]$, якщо $f(x)$ ділиться на $(x-\alpha)^k$, але не ділиться на $(x-\alpha)^{k+1}$.

Означення. Корені кратності 1 називаються *простими*, а корені, кратність яких більша за 1 називаються *кратними*.

Приклад. Для многочлена $f(x) = (x+2)^3 (x-3)^2$ корінь третьої кратності $x = -2$, а $x = 3$ – корінь другої кратності.

Теорема 2. Число всіх можливих коренів многочлена $f(x)$ над полем *P* не перевищує його степеня.

Наслідок. Якщо многочлен $f(x) \in P[x]$, степінь якого не перевищує n, має $n+1$ коренів, то $f(x)$ є нуль–многочлен.

Теорема 3. Існує один і тільки один многочлен $f(x) \in P[x]$ не вище n–го степеня, який приймає в $n+1$ різних точках $\alpha_j \in P$ задані значення $\beta_j \in P$ $(j = 1,2,\ldots,n+1)$.

Такий многочлен має вигляд:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \frac{(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\ldots(x-\alpha_{n+1})}{(\alpha_i-\alpha_1)\ldots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\ldots(\alpha_i-\alpha_{n+1})} \qquad (3)$$

Многочлен (3) називають *інтерполяційним многочленом Лагранжа.*

Іноді доцільно многочлен $f(x)$ записувати в іншому вигляді:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-\alpha_1) + \ldots + c_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n), \qquad (4)$$

де коефіцієнти $c_0, c_1, ..., c_n$ визначаються послідовною підстановкою значень $x=\alpha_1,\ x=\alpha_2, ...,\ x=\alpha_{n+1}$.

Многочлен (4) називають *інтерполяційним многочленом Ньютона.*

Теорема 4 (Кронекера). Якщо $f(x)$ – довільний многочлен над полем P, для якого $\deg f \geq 1$, то існує розширення K поля P, в якому многочлен $f(x)$ має корінь.

Теорема 5. Для будь–якого многочлена $f(x) \in P[x]$ степеня $\deg f \geq 1$ існує таке розширення L поля P, в якому $f(x)$ розкладається на лінійні множники.

Означення. Поле L, в якому многочлен $f(x)$ розкладається на лінійні множники, називається *полем розкладу цього многочлена.*

Означення. Поле P називається *алгебраїчно замкнутим*, якщо воно є полем розкладу для будь–якого многочлена $f(x) \in P[x]$ ненульового степеня.

Поле P є алгебраїчно замкнуте, якщо всі будь–якого многочлена $f(x) \in P[x]$ належать саме цьому полю.

Наслідок 1. Многочлен $f(x) \in P[x]$ n–го степеня має у полі розкладу n коренів.

Наслідок 2. У полі розкладу многочлен $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ має канонічний розклад виду $f(x)=a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}...(x-\alpha_m)^{k_m}$, де $(k_1+k_2+...+k_m=n)$.

Теорема 6 (Вієта). Якщо $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – корені многочлена $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \in P[x]$, то

$$\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+...+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+...+\alpha_2\alpha_n+...+\alpha_{n-1}\alpha_n=\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

....

$$\sum_{C_n^k} \alpha_{j1}\alpha_{j2}...\alpha_{jk} = (-1)^n \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Сума $\sum_{C_n^k} \alpha_{j1}\alpha_{j2}...\alpha_{jk}$ береться по всіх C_n^k комбінаціях з n індексів $1,2,3,...,n$ по k.

Означення. *Похідною від многочлена* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ називається многочлен $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)x_{n-1}a^{n-2} + ... + 2a_2 x + a_1$.

Похідна від многочлена нульового степеня та нуль–многочлена дорівнює нулю.

Правила диференціювання для многочленів над полем R**:**

1) $\forall f(x), g(x) \in P[x]$ $\quad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$;

2) $\forall f(x), g(x) \in P[x]$ $\quad (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

3) $\forall f(x), g(x) \in P[x]$ $\quad (cf(x))' = cf'(x)$;

4) $\forall f(x), g(x) \in P[x]$ $\quad \left((f(x))^K\right)' = K(f(x))^{K-1} f'(x)$.

Якщо поле P має характеристику 0, то для кожного многочлена $f(x)$ з кільця $P[x]$ такого, що $\deg f \geq 1$, виконується рівність $\deg f' = \deg f - 1$.

Теорема 7. Якщо незвідний у даному полі P характеристики 0 многочлен $q(x)$ є множником кратності $k \geq 2$ для многочлена $f(x)$, то він є множником кратності $k-1$ для похідної $f'(x)$. Якщо $q(x)$ є множником першої кратності многочлена $f(x)$, то він не входить у розклад похідної $f'(x)$ на незвідні множники.

Наслідок. Для того, щоб многочлен $f(x)$ не мав кратних множників, необхідно і достатньо, щоб многочлен $f(x)$ був взаємно простим зі своєю похідною $f'(x)$.

Алгоритм відокремлення кратних множників

1) Представити многочлен у вигляді добутку:

$$f(x)=\phi_1\phi_2^2\phi_3^3...\phi_m^m,$$

де ϕ_i – добуток незвідних множників $f(x)$ з певною кратністю.

2) Знайти похідну многочлена:

$$f'(x)=\phi_2\phi_3^2\phi_4^3...\phi_m^{m-1}\psi_1,$$

де ψ_1 не ділиться на $\phi_1,...,\phi_m$.

3) Записати найбільший спільний дільник (f, f'), який є добутком усіх множників, які входять у розклади як $f(x)$, так і $f'(x)$:

$$d_1=(f, f')=\phi_2\phi_3^2...\phi_m^{m-1}.$$

4) Знайти $d'_1 : d'_1=\phi_3\phi_4^2...\phi_m^{m-2}\psi_2$, де ψ_2 не ділиться на ϕ_i $(i=2,..,m)$.

5) Знайти $d_2=(d_1,d'_1)=\phi_3\phi_4^2...\phi_m^{m-2}$,

$$d_3=(d_2,d'_2)=\phi_4\phi_5^2...\phi_m^{m-3},$$

....

$$d_{m-2}=(d_{m-3},d'_{m-3})=\phi_{m-1}\phi_m^2,$$

$$d_{m-1}=(d_{m-2},d'_{m-2})=\phi_m,$$

$$d_m=(d_{m-1},d'_{m-1})=1,$$

причому d_i $(i=1,...,m)$ не містять множників ψ_j.

6) Знайти q_i за формулами:

$$q_1=\frac{f}{d_1}=\phi_1\phi_2...\phi_m,$$

$$q_2=\frac{d_1}{d_2}=\phi_2\phi_3...\phi_m,$$

$$q_3=\frac{d_2}{d_3}=\phi_3\phi_4...\phi_m,$$

....

$$q_{m-1} = \frac{d_{m-2}}{d_{m-1}} = \phi_{m-1}\phi_m ,$$

$$q_m = \frac{d_{m-1}}{d_m} = \phi_m .$$

7) Знайти кожний множник φ_i за формулами:

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{q_2},\ \varphi_2 = \frac{q_2}{q_3},\ \ldots,\ \varphi_{m-1} = \frac{q_{m-1}}{q_m},\ \varphi_m = q_m .$$

У довільного многочлена над полем P можна відокремити кратні множники за допомогою скінченного числа раціональних дій над деякими многочленами.

Теорема 8. Для того, щоб α був коренем кратності k многочлена $f(x)$, необхідно і достатньо, щоб $f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0,\ f^{(k)} \neq 0$, тобто щоб $f(x) \vdots (x-\alpha)^k \wedge$ $\wedge\ f(x) \not\vdots (x-\alpha)^{k+1}$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Використовуючи інтерполяційну формулу Ньютона, побудувати многочлен найменшого степеня $f(x) \in Q[x]$ за такою таблицею:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	3	4	6

Розв'язання.

Щоб знайти коефіцієнти многочлена $f(x) \in Q[x]$ запишемо загальний вигляд інтерполяційної формули Ньютона:

$$f(x) = C_0 + C_1(x-\alpha_1) + \ldots + C_n x(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n) .$$

В нашому випадку многочлен набуде такого вигляду:

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2(x-1)x + C_3 x(x-1)(x-2) + C_4 x(x-1)(x-2)(x-3) .$$

Підставивши в цей вираз значення $x \in \{0,1,2,3,4\}$ складемо систему:

$$\begin{cases} f(0)=1=C_0 \\ f(1)=2=C_0+C_1 \\ f(2)=3=C_0+2C_1+2C_2 \\ f(3)=4=C_0+3C_1+6C_2+6C_3 \\ f(4)=6=C_0+4C_1+12C_2+24C_3+24C_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0=1 \\ C_1=1 \\ C_2=0 \\ C_3=0 \\ C_4=1/24 \end{cases}$$

$$f(x)=1+x+\frac{1}{24}(x-1)(x-2)(x-3)=\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{4}x^3+\frac{11}{24}x^2+\frac{3}{4}x+1.$$

Приклад 2. Знайти кратність кореня $x=3$ многочлена $f(x)=x^4-6x^3+10x^2-6x+9$ з кільця $Q[x]$.

Розв'язання.

Для знаходження кратності кореня використаємо схему Горнера:

	1	–6	10	–6	9	
3	1	–3	1	–3	0	$\Rightarrow$ $x=3$ – корінь
3	1	0	1	0		$\Rightarrow$ $x=3$ – корінь
3	1	3	10			

Отже, $x=3$ – корінь кратності 2.

Приклад 3. Відокремити кратні корені многочлена $f(x)=x^5-ix^4+5x^3-ix^2+8x+4i$.

Розв'язання.

1) Знаходимо похідну многочлена $f'(x)=5x^4-4ix^3+15x^3-2ix+8$ та шукаємо НСД $f(x)$ та $f'(x)$:

$$\begin{array}{l|l} x^5-ix^4+5x^3-ix^2+8x+4i & \underline{5x^4-4ix^4+15x^3-2ix+8} \\ -\ 5x^5-5ix^4+25x^3-5ix^2+40x+20i & \ x-i \\ \underline{5x^5-4ix^4+15x^3-2ix+8x} & \\ \quad -\ -ix^4+10x^3-3ix^2+32x+20i & \\ \qquad -5ix^4+50x^3-15ix^2+160x+100i & \\ \qquad \underline{-5ix^4-4x^3-15ix^2-2x-8i} & \\ \qquad\qquad 54x^3+162x+108i & \\ \qquad\qquad\quad x^3+3x+2i & \end{array}$$

$$
\begin{array}{rl|l}
- & 5x^4-4ix^4+15x^3-2ix+8 & x^3+3x+2i \\
 & \underline{5x^4+15x^2+10ix} & 5x-4i \\
 & \quad - \; -4ix^3-12ix+8 & \\
 & \quad \underline{-4ix^3-12ix+8} & \\
 & \qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Отже, $d_1\left(f, f'\right)=x^3+3x+2i$.

2) Знаходимо похідну від d_1 та шукаємо НСД d_1 та d_1':

$d_1'=3x^2+3$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^3+3x+2 & 3x^2+3 \\
- & 3x^3+9x+6i & x \\
 & \underline{3x^3+3x} & \\
 & \qquad 6x+6i &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl|l}
 & 3x^2+3 & 6x+6i \\
- & x^2+1 & x+i \\
 & \underline{x^2+ix} & x-i \\
 & \quad - \; -ix+1 & \\
 & \quad \underline{-ix+1} & \\
 & \qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Отже, $d_2=\left(d_1, d_1'\right)=6x+6i$.

3) Знаходимо похідну від d_2 та шукаємо НСД d_2 та d_2':

$d_2'=6,\; d_3=\left(d_2, d_2'\right)=1$.

4) Знаходимо многочлени q_1, q_2, q_3:

а) $q_1=\dfrac{f}{d_1}=x^2-ix+2$

$$
\begin{array}{rl|l}
- & x^5-ix^4+5x^3-ix^2+8x+4i & x^3+3x+2i \\
 & \underline{x^5+3x^3+2ix^2} & x^2-ix+2 \\
 & \quad - \; -ix^4+2x^3-3ix^2+8x+4i & \\
 & \quad \underline{-ix^4-3ix^2+2x} & \\
 & \qquad - \; 2x^3+6x+4i & \\
 & \qquad \underline{2x^3+6x+4i} & \\
 & \qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

б) $q_2 = \dfrac{d_1}{d_2} = x^2 - ix + 2$

$$
\begin{array}{rl|l}
- & x^3 + 3x + 2i & \underline{x + i} \\
 & \underline{x^3 + ix^2} & x^2 - ix + 2 \\
- & -ix^2 + 3x + i2 & \\
 & \underline{-ix^2 + x} & \\
- & 2x + 2i & \\
 & \underline{2x + 2i} & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

в) $q_3 = \dfrac{d_2}{d_3} = x + i$

$$
\begin{array}{rl|l}
- & x^2 - ix + 2 & \underline{x + i} \\
 & \underline{x^2 + ix} & x + 2i \\
- & -2ix + 2 & \\
 & \underline{-2ix + 2} & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

5) Знайдемо $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$: $\varphi_1 = \dfrac{q_1}{q_2} = 1$, $\varphi_2 = \dfrac{q_2}{q_3} = x - 2i$, $\varphi_3 = q_3 = x + i$.

Отже, $f(x) = (x - 2i)^2 (x + i)^3$.

Приклад 4. Відокремити кратні множники многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

Розв'язання.

Знаходимо похідну многочлена $f(x)$: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

За алгоритмом Евкліда знаходимо НДС многочленів $f(x)$ і $f'(x)$:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^3 - 3x^2 + 4 & \underline{3x^2 - 6x} \\
- & 3x^3 - 9x^2 + 12 & x - 1 \\
 & \underline{3x^3 - 6x^2} & \\
- & -3x^2 + 12 & \\
 & \underline{-3x^2 + 6x} & \\
 & -6x + 12 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl|l}
 & 3x^2 - 6x & \underline{-6x + 12} \\
- & 6x^2 - 12x & -x \\
 & \underline{6x^2 - 12x} & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

Отже, НДС $f(x)$ і $f'(x)$ дорівнює $-6x + 12 = d_1(x)$.

$d_1'(x) = -6$, $d_2(x) = (d_1, d_1') = 1$.

$$q_1 = \frac{f}{d_1} = x^2 - x - 2, \quad q_2 = \frac{d_1}{d_2} = -6x + 12, \quad q_3 = d_2 = 1$$, оскільки

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - 3x^2 + 4 & \underline{-6x + 12} \\
-\ 6x^3 + 18x^2 - 24 & x^2 - x - 2 \\
\qquad\quad \underline{6x^3 + 12x^2} & \\
\qquad\qquad -\ 6x^2 - 24 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{6x^2 - 12x} & \\
\qquad\qquad\qquad -\ 12x - 24 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{12x - 24} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Знаходимо ϕ_i : $\phi_1 = \frac{q_1}{q_2} = x + 1,\ \phi_2 = \frac{q_2}{q_3} = 2 - x$ і $f(x) = \phi_1 \phi_2^2 \phi_3^3 ... \phi_m^m$.

$$\begin{array}{l|l}
x^2 - x - 2 & \underline{-6x + 12} \\
-\ -6x^2 + 6x + 12 & x + 1 \\
\quad \underline{-6x^2 + 12x} & \\
\qquad -\ -6x + 12 & \\
\qquad\quad \underline{-6x + 12} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Отже, $f(x) = (2 - x)^2 (x + 1)$.

Приклад 5. Розкласти многочлен $f(x)$ за степенями двочлена $g(x) = x - \alpha$ і знайти $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$, $f'''(\alpha)$, $f^{IV}(\alpha)$, якщо $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ належить $Q[x]$ і $\alpha = 1$.

Розв'язання.

<u>*І спосіб.*</u> Знаходимо похідні многочлена $f(x)$:

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 5,$

$f''(x) = 12x^2 - 12x + 6,$

$f'''(x) = 24x - 12,$

$f^{IV}(x) = 24.$

Підставимо в похідні значення $x = 1$, тоді

$f'(1) = 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 5 = 4 - 6 + 6 - 5 = -1,$

$f''(1) = 12 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 6 = 12 - 12 + 6 = 6,$

$f'''(1) = 24(1) - 12 = 24 - 12 = 12,$

$f^{IV}(1) = 24.$

Щоб знайти розклад многочлена $f(x)$ за степенями двочлена $x-1$, застосуємо формулу Тейлора, яка справджується для многочленів над полем характеристики 0:

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{IV}(1)}{4!}(x-1)^4.$$

Оскільки $f(1) = (1)^4 - 2(1)^3 + 3(1)^2 - 5(1) + 1 = 1 - 2 + 3 - 5 + 1 = -2,$ то

$f(x) = (x-1)^4 + 2(x-1)^3 + 3(x-1)^2 - (x-1) - 2.$

II спосіб. Знайдемо розклад многочлена $f(x)$ за степенями двочлена $(x-1)$, застосувавши для знаходження коефіцієнтів розкладу схему Горнера:

	1	–2	3	–5	1
1	1	–1	2	–3	–2= $f(x)$
1	1	0	3	–1= $f'(x)$	
1	1	1	3= $f''(x)$		
1	1	2= $f'''(x)$			
1	1= $f^{IV}(x)$				

$$f(1) = -2, \quad \frac{1}{1!}f'(1) = -1, \quad \frac{1}{2!}f''(x) = 3, \quad \frac{1}{3!}f'''(x) = 2, \quad \frac{1}{4!}f^{IV}(x) = 1.$$

Отже, $f(x) = (x-1)^4 + 2(x-1)^3 + 3(x-1)^2 - (x-1) - 2$,

$f'(1) = -1, \quad f''(x) = 6, \quad f'''(x) = 12, \quad f^{IV}(x) = 24.$

1.5. Поле раціональних дробів

Теорема 1. Для будь–якого поля P існує єдине поле $P(x)$, яке містить кільце $P[x]$ многочленів над полем P і кожний елемент якого можна подати у вигляді частки $\frac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x), g(x) \in P[x]$, $g(x) \neq 0$.

$P(x)$ називається *полем раціональних дробів над* P, а кожний його елемент – *раціональним дробом над* P.

Означення. Раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ називається *правильним*, якщо степінь многочлена $f(x)$ менша за степінь многочлена $g(x)$. В іншому разі дріб – *неправильний*.

Приклад: $f_1(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 + 2}$ – правильний дріб,

$f_2(x) = \frac{x^5 - 4x + 1}{x^2 - 4}$ – неправильний дріб.

Лема 1. Сума правильних дробів є правильний дріб.

Означення. *Елементарним дробом у полі* P називається раціональний дріб виду $\frac{f(x)}{(g(x))^k}$, де $g(x)$ – незвідний многочлен у полі P, $f(x) \in P[x]$ і $\deg f(x) \leq \deg g(x)$, а k – будь–яке натуральне число.

Кожний елементарний дріб є правильним.

Лема 2. Якщо $g_1(x)$ і $g_2(x)$ – взаємнопрості многочлени над полем P і $\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)}$ правильний раціональний дріб над цим полем, то в кільці $P[x]$ завжди можна знайти такі многочлени $f_1(x)$ і $f_2(x)$, що $\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$.

Наслідок. Якщо $g_1(x),\ldots,g_m(x)$ – попарно взаємно прості многочлени над полем P і $\dfrac{f(x)}{g_1(x)\cdot\ldots\cdot g_m(x)}$ правильний раціональний дріб над цим полем, то в кільці $P[x]$ завжди можна знайти такі многочлени $f_1(x),\ldots,f_m(x)$, що $\dfrac{f(x)}{g_1(x)\cdot\ldots\cdot g_m(x)}=\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}+\dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}+\ldots+\dfrac{f_m(x)}{g_m(x)}$, причому всі дроби у правій частині рівності правильні.

Лема 3. Будь–який правильний дріб над полем P виду $\dfrac{f(x)}{(g(x))^k}$, де $g(x)$ – многочлен, незвідний у полі P, а k – довільне натуральне число, можна подати як суму двох правильних дробів над полем P виду $\dfrac{f(x)}{(g(x))^k}=\dfrac{f_1(x)}{(g(x))^k}+\dfrac{s_1(x)}{(g(x))^{k-1}}$, з яких перший є елементарним у полі P.

Наслідок. Кожний правильний дріб над полем P виду $\dfrac{f(x)}{(g(x))^k}$, де $g(x)$ – многочлен незвідний у полі P, а k – довільне натуральне число, можна подати як суму елементарних дробів у цьому полі: $\dfrac{f(x)}{(g(x))^k}=\dfrac{f_1(x)}{g(x)}+\dfrac{f_2(x)}{(g(x))^2}+\ldots+\dfrac{f_K(x)}{(g(x))^k}$.

Теорема 2. Будь–який правильний дріб над полем P можна подати як суму елементарних дробів у цьому полі.

Теорема 3. Розклад правильного раціонального дробу на елементарні дроби у даному полі єдиний.

Теорема 4. Будь–який неправильний дріб $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ над полем P можна подати як суму многочлена і правильного дробу:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=s(x)+\frac{f_1(x)}{g(x)}, \tag{5}$$

де многочлен $s(x)$ – ціла частина дробу $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\dfrac{f_1(x)}{g(x)}$ – правильний дріб.

Зображення неправильного дробу у вигляді (5) називається *відокремленням цілої частини*.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. У полі $R[x]$ знайти нескоротний дріб, який дорівнює даному:

$$a)\,\frac{x^2-4x+3}{x^2-5x+6}, \qquad б)\,\frac{x^8+x^4+1}{x^2+x+1}.$$

Розв'язання.

а) Розкладемо чисельник і знаменник на прості множники і скоротимо дріб:

$\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-5x+6}=\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x-2)}=\dfrac{x-1}{x-2}$. Отримали нескоротний дріб.

б) Розділимо x^8+x^4+1 "кутом" на x^2+x+1:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^8+x^4+1 & \underline{x^2+x+1} \\
\underline{x^8+x^7+x^6} & x^6-x^5+x^3-x+1 \\
-\;-x^7-x^6+x^4+1 & \\
\underline{-x^7-x^6-x^5} & \\
-\;x^5+x^4+1 & \\
\underline{x^5+x^4+x^3} & \\
-\;-x^3+1 & \\
\underline{-x^3-x^2-x} & \\
-\;x^2+x+1 & \\
\underline{x^2+x+1} & \\
0 &
\end{array}
$$

$$\frac{x^8+x^4+1}{x^2+x+1}=\frac{\left(x^2+x+1\right)\left(x^6-x^5+x^3-x+1\right)}{x^2+x+1}=x^6-x^5+x^3-x+1=$$
$$=\left(x^2-x+1\right)\left(x^4-x^2+1\right).$$

Приклад 2. Перевірити, чи є раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{5x+6}{x^4+2x^2+1}$ елементарним над полем R.

Розв'язання.

Нагадаємо, що $\frac{f(x)}{g(x)}$ – елементарний, якщо його можна представити, як $\frac{f(x)}{[g_1(x)]^k}$, де $g_1(x)$ – незвідний над полем многочлен, $\deg f<\deg g_1$, $k\in N$.

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{5x+6}{x^4+2x^2+1}=\frac{5x+6}{(x^2+1)^2}$$

Отже, $k=2\in N$, многочлен x^2+1 незвідний у полі R, тому цей дріб елементарний.

Приклад 3. Розкласти дроби на елементарні дроби:

а) $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^4+2x^3-18x^2+54}{x^5+6x^4+9x^3}$ над R;

б) $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2}{x^4-4}$ над Q;

в) $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{i}{(x-i)(x+2i)}$ над C.

Розв'язання.

а) $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^4+2x^3-18x^2+54}{x^5+6x^4+9x^3}$ над R.

Цей дріб нескоротний, бо НСД чисельника і знаменника дорівнює 1. Розкладемо знаменник на незвідні множники над R і, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, леми 2, 3 та наслідки з них маємо:

$$\frac{x^4+2x^3-18x^2+54}{x^3(x+3)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x+3}+\frac{E}{(x+3)^2}=$$

$$= \frac{Ax^2(x+3)^2 + Bx(x+3)^2 + C(x+3)^2 + Dx^3(x+3) + Ex^3}{x^3(x+3)^2} =$$

$$= \frac{Ax^2\left(x^2+6x+9\right) + Bx\left(x^2+6x+9\right) + C\left(x^2+6x+9\right) + D\left(x^4+3x^3\right) + Ex^3}{x^3(x+3)^2}$$

Прирівняємо відповідні коефіцієнти:

$$\begin{cases} A+D=1, \\ 6A+B+3D+E=2, \\ 9A+6B+C=-18, \\ 9B+6C=0, \\ 9C=54, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0, \\ B=-4, \\ C=6, \\ D=1, \\ E=3. \end{cases}$$

Отримаємо:

$$\frac{x^4+2x^3-18x^2+54}{x^3(x+3)^2} = -\frac{4}{x^2} + \frac{6}{x^3} + \frac{1}{x+3} + \frac{3}{(x+3)^2} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

б) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2}{x^4-4}$ над Q.

Розкладемо знаменник дробу на незвідні над Q многочлени:

$$\frac{x^2}{x^4-4} = \frac{x^2}{\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)} = \frac{Ax+B}{x^2-2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} =$$

$$\frac{(Ax+B)\left(x^2+2\right)-(Cx+D)\left(x^2-2\right)}{\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)} =$$

$$= \frac{Ax^3+Bx^2+2Ax+2B+Cx^3+Dx^2-2Cx-2D}{\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)}.$$

З алгебраїчної рівності многочленів отримаємо систему:

$$\begin{cases} A+C=0, \\ B+D=1, \\ 2A-2C=0, \\ 2B-2D=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0, \\ B=1/2, \\ C=0, \\ D=1/2. \end{cases}$$

Отже, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{2(x^2-2)} + \dfrac{1}{2(x^2+2)}.$

в) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{i}{(x-i)(x+2i)}$ над C.

Розкладемо знаменник дробу на незвідні многочлени над С:

$$\frac{i}{(x-i)(x+2i)} = \frac{A}{x-i} + \frac{B}{x+2i} \Rightarrow \frac{Ax+2Ai+Bx-Bi}{(x-i)(x+2i)},$$

$$\begin{cases} A+B=0, \\ 2Ai-Bi=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{3}, \\ B=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Отже, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{3(x-i)} - \dfrac{1}{3(x+2i)}.$

Приклад 4. Довести тотожність:

$$a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x,$$

де $a,b,c \in R.$

Розв'язання.

Розглянемо многочлен

$$f(x) = a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Обчислимо його значення, якщо $x \in \{a,b,c\}$: $f(a)=a,\ f(b)=b,\ f(c)=c.$

Це значить, що многочлен $f(x)$ є многочленом Лагранжа степінь якого не вище 2. Многочлен $g(x)$ при $x \in \{a,b,c\}$ набуває значень $g(a)=a,\ g(b)=b,\ g(c)=c.$

Як відомо, над полем R існує лише один многочлен, степінь якого не більша 2 і який при трьох різних дійсних числах a,b,c набуває значень a,b,c. Це означає, що многочлени $f(x)$ і $g(x)$ дорівнюють один одному.

РОЗДІЛ 2. МНОГОЧЛЕНИ ВІД КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

2.1. Кільце многочленів від кількох змінних

Означення. *Кільцем многочленів* $R[x_1,..., x_n]$ *від* n *змінних* $x_1,..., x_n$ над областю цілісності R називається кільце многочленів від однієї змінної x_n над кільцем $R[x_1,..., x_n]$, тобто $R[x_1,..., x_n] = R[x_1,..., x_{n-1}][x_n]$.

Теорема 1. Кільце многочленів $R[x_1,..., x_n]$ над областю цілісності R є областю цілісності.

Теорема 2. Кожний елемент $f \in R[x_1, x_2,..., x_n]$ можна подати як скінчену суму:

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i x_1^{k_{1i}} x_2^{k_{2i}} ... x_n^{k_{ni}}, \tag{6}$$

де $a_i \in R,\ k_{ij} \in Z_+,\ i \in \{1,2,..., m\}$ та $j \in \{1,2,..., n\}$.

Означення. Кожний елемент кільця $R[x_1,..., x_n]$ називається *многочленом від* n *змінних над* R і позначається $f(x_1,..., x_n),\ g(x_1,..., x_n)$ і т.д.

Кожен доданок $a_i x_1^{K_{1i}} x_2^{K_{2i}} ... x_n^{K_{ni}}$ в сумі (6) називається *членом многочлена* $f(x_1,..., x_n)$, відповідний елемент $a_i \in R$ – *коефіцієнтом* цього члена. Два члени, які відрізняються тільки коефіцієнтами називаються *подібними*.

Теорема 3. Будь–який многочлен $f(x_1,.., x_n) \in R[x_1,..., x_n]$ можна подати у канонічній формі (без подібних членів) лише одним способом.

Означення. *Степенем члена* $a x_1^{K_1} x_2^{K_2} ... x_n^{K_n}$ *многочлена* називається сума $K_1 + K_2 + ... + K_n$. Число $K_i\ \left(i = \overline{1, n}\right)$ називається *степенем даного члена відносно* x_i. Найбільший із степенів членів називається *степенем многочлена*, а член з найбільшим степенем – *старшим членом многочлена.*

Означення. Якщо всі члени многочлена мають однаковий степінь, то многочлен називається *однорідним*.

Будь–який многочлен можна подати як суму скінченного числа однорідних многочленів різних степенів.

Степінь суми двох многочленів не може перевищувати степінь кожного з них.

Теорема 4. Якщо $f(x_1,...,x_n)$ і $g(x_1,...,x_n)$ – відмінні від нуля многочлени з $R[x_1,...,x_n]$, де R – область цілісності, то $\deg(f\cdot g)=\deg f+\deg g$.

Наслідок. У кільці $R[x_1,...,x_n]$ дільниками одиниці можуть бути лише відмінні від нуля константи.

Нехай $ax_1^{K_1}x_2^{K_2}...x_n^{K_n}$ і $bx_1^{L_1}x_2^{L_2}...x_n^{L_n}$ – два члени многочлена $f(x_1,...,x_n)$. Вважається, що перший елемент вищий від другого, якщо $K_1=L_1, K_2=L_2,..., K_{i-1}=L_{i-1}, K_i>L_i$. Відношення *"бути вищим"* на множині членів многочленів є лінійним строгим порядком, його називають **лексикографічним** (позначають $ax_1^{K_1}x_2^{K_2}...x_n^{K_n}\succ bx_1^{L_1}x_2^{L_2}...x_n^{L_n}$).

Приклад:

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^4x_2x_3-2x_1^3-x_1^2x_2^3+2x_1^2x_2^2x_3+x_1^2x_2x_3^3+2x_1x_2^3x_3^2+5x_1x_3^3+6$ – лексикографічний запис многочлена, $x_1^4x_2x_3$ – вищий член.

Лема 1. Вищий член добутку двох многочленів дорівнює добутку вищих членів цих многочленів.

Означення. Многочлен $f\in P_n$ $(P[x_1,...,x_n])$ *ділиться* на многочлен $g\in P_n$, $g\neq 0$ (записується $f\,\vdots\,g$), якщо існує такий многочлен $s\in P_n$, що $f=g\cdot s$. При цьому g – дільник f.

Властивості подільності многочленів в P_n:

1) $\forall\, f,g,h\in P_n$ $\quad (f\,\vdots\,g\wedge g\,\vdots\,h\Rightarrow f\,\vdots\,h)$;

2) $\forall\, f,g,h\in P_n$ $\quad (f\,\vdots\,h\wedge g\,\vdots\,h\Rightarrow (f\pm g)\,\vdots\,h)$;

3) $\forall\, f,h\in P_n$ $\quad (f\,\vdots\,h\Rightarrow \forall\, g\in P_n(fg\,\vdots\,h))$;

4) $\forall\, h, f_1,..., f_n\in P_n$ $\quad (f_1\,\vdots\,h\wedge f_2\,\vdots\,h\wedge...\wedge f_m\,\vdots\,h\Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall\, g_1,\ldots,g_n \in P_n \ \left(f_1g_1+f_2g_2+\ldots+f_mg_m\right)\vdots h)$$

5) $\forall\, f \in P_n \ \ \forall c \in P\setminus\{0\} \quad (f \vdots c)$;

6) $\forall\, f, g \in P_n \ \ \forall c \in P\setminus\{0\} \ (f \vdots g \Rightarrow f \vdots cg)$.

Асоційованими многочленами в кільці P_n є такі і тільки такі многочлени, які відрізняються множником, що є відмінною від нуля константою.

Означення. Многочлен $p \in P_n$ називається *незвідним у полі P*, якщо $\deg p \geq 1$ і $\underset{U,V\in P_n}{\forall}\left(p = UV \Rightarrow \deg U = 0 \vee \deg V = 0\right)$.

Означення. Многочлен $g \in P_n$ називається *звідним у полі P*, якщо $\deg g \geq 1$ і $\underset{U,V\in P_n}{\exists}\left(g = UV \wedge \deg U \geq 1 \wedge \deg V \geq 1\right)$.

Властивості незвідних многочленів:

1) Якщо p незвідний у полі P многочлен, то і будь–який асоційований з ним многочлен $c\cdot p$ незвідний у полі P.

2) Якщо p і q незвідні у полі P многочлени і $p \vdots q$, то p і q асоційовані.

3) Будь–який многочлен $p \in P_n$ першого степеня незвідний у полі P.

Теорема 5. Будь–який многочлен $f(x_1,\ldots,x_n)$ над полем P ненульового степеня множна подати як добуток многочленів, незвідних у полі P, причому єдиним способом з точністю до сталих множників і їх порядку.

Лема 2. Для будь–якої скінченої системи елементів $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k \in S$ (S – область цілісності), відмінних від нуля, існує єдиний (з точністю до дільників одиниці) НСД.

Означення. Многочлен $f(x)\in S[x]$, $f(x)\neq 0$ називається *примітивним* (відносно S), якщо НСД його коефіцієнтів дорівнює одиниці.

Лема 3. Добуток двох примітивних многочленів з $S[x]$ є примітивний многочлен.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Впорядкувати лексикографічно і знайти вищий член многочлена з кільця $Z[x,y,z]$, якщо

$$f(x,y,z)=2x^3(y+z)-3y^2x^2(x^2+z^2)+5x^4yz^4.$$

Розв'язання.

Розкривши дужки, отримаємо:

$$f(x,y,z)=2x^3y+2x^3z-3y^2x^4-3y^2x^4-3y^2x^2z^2+5x^4yz^4=$$

$$=-3x^4y^2+5x^4yz^4+2x^3y+2x^3z-3x^2y^2z^2.$$

Вищий член многочлена: $-3y^2x^4$, а многочлен $f(x,y,z)$ впорядковано за спаданням степенів x,y,z.

Приклад 2. Застосовуючи заміну $x=ty$ розкласти на незвідні у полі Q многочлен

$$f(x,y)=9x^4-12x^3y-21x^2y^2-40xy^3-16y^4.$$

Розв'язання.

Враховуючи заміну, отримаємо:

$$f(x,y)=9t^4y^4-12t^3y^4-21t^2y^4-40ty^4-16y^4=y^4\left(9t^4-12t^3-21t^2-40t-16\right)=$$

$$=y^4\left[\left(\left(3t^2\right)^2-2\left(3t^2\right)\cdot 2t+2t^2\right)-\left(25t^2+40t+16\right)\right]=y^4\left(3t^2-7t-4\right)\left(3t^2+3t+4\right)=$$

$$=y^4\left(3\frac{x^2}{y^2}-7\frac{x}{y}-4\right)\left(3\frac{x^2}{y^2}+3\frac{x^2}{y^2}+4\right)=\left(3x^2-7xy-4y^2\right)\left(3x^2+3xy+4y^2\right).$$

2.2. Симетричні многочлени

Означення. Многочлен $f\left(x_1,...,x_n\right)$ називається *симетричним відносно змінних* $x_1,...,x_n$, якщо внаслідок довільної перестановки змінних $x_1,...,x_n$ утворюється многочлен рівний даному.

<u>*Приклад:*</u> 1) $f\left(x_1,x_2\right)=x_1x_2^2+3x_1x_2-2x_1-2x_2+x_1^2x_2+5$ симетричний відносно x_1,x_2;

2) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_2^2+x_1x_2+x_1x_3$ симетричний відносно x_1,x_3, але несиметричний відносно x_2,x_3 або x_1,x_2. Отже, $f\left(x\right)$ несиметричний відносно x_1,x_2,x_3

Основні симетричні многочлени:

$$\sigma_1=x_1+x_2+...+x_n$$

$$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3...+x_{n-1}x_n$$

$$......................................$$

$$\sigma_n=x_1x_2...x_n$$

Властивості симетричних многочленів:

1) Сума, різниця і добуток симетричних многочленів від n змінних над деяким полем P є симетричний многочлен над цим полем.

Наслідок. Множина всіх симетричних многочленів від n змінних над полем P утворює область цілісності з 1 відносно дій додавання і множення.

2) Якщо симетричний многочлен $f\left(x_1,...,x_n\right)$ містить деякий член $ax_1^{K_1}x_2^{K_2}...x_n^{K_n}$, то він містить і член, утворений з даного, внаслідок будь–якої перестановки показників $K_1,..,K_n$.

Наслідок. Якщо $ax_1^{K_1}x_2^{K_2}...x_n^{K_n}$ є вищий член симетричного многочлена, то $K_1\geq K_2\geq...\geq K_n$.

Теорема 1. (основна теорема теорії симетричних многочленів)

Будь–який симетричний многочлен $f\left(x_1,...,x_n\right)$ від n змінних над полем P можна подати у вигляді многочлена від основних симетричних функцій $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n$ цих змінних, коефіцієнти якого належать тому ж полю P, причому це представлення єдине.

Теорема 2. Зображення симетричного многочлена у вигляді многочлена від основних симетричних функцій єдине.

Теорема 3. Якщо $f(x)$ – многочлен від однієї змінної над полем P з коренями $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, то будь–який симетричний многочлен $g(x_1,x_2,...,x_n)$ над полем P при $x_1=\alpha_1, x_2=\alpha_2,...,$ $x_n=\alpha_n$ набуває значення, яке є елементом поля P.

<u>Представлення симетричних сум через елементарні симетричні многочлени:</u>

1) Многочлени від двох змінних:

$$S_1 = x + y = \sigma_1$$

$$S_2 = x^2 + y^2 = \sigma_1^{\ 2} - 2\sigma_2$$

$$S_3 = x^3 + y^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$$

$$S_4 = x^4 + y^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$$

$$S_5 = x^5 + y^5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$$

$$S_6 = x^6 + y^6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3$$

$$S_7 = x^7 + y^7 = \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3$$

$$S_8 = x^8 + y^8 = \sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4$$

2) Многочлени від трьох змінних:

$$S_1 = x + y + z = \sigma_1$$

$$S_2 = x^2 + y^2 + z^2 = \sigma_1{}^2 - 2\sigma_2{}^2$$

$$S_3 = x^3 + y^3 + z^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$$

$$S_4 = x^4 + y^4 + z^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Чи симетричні многочлени:

а) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_1 + x_2 + x_3$;

б) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_2x_3 - 1$.

Розв'язання.

а) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_1 + x_2 + x_3$.

Нехай $x_1 = x_3$, тоді

$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_3^2x_2 + x_3^2x_1 + x_2^2x_3 + x_2^2x_1 + x_3 + x_2 + x_1$, звідси $f_1 \neq f$.

Отже, даний многочлен несиметричний.

б) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_2x_3 - 1$.

Нехай $x_1 = x_2$, тоді $f_1 = 2x_2^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + x_2x_1x_3 - 1.$

Нехай $x_1 = x_3$, тоді $f_2 = 2x_3^2 + 2x_2^2 + 2x_1^2 + x_3x_2x_1 - 1.$

Нехай $x_2 = x_3$, тоді $f_3 = 2x_1^2 + 2x_3^2 + 2x_2^2 + x_1x_3x_1 - 1.$

Отже, даний многочлен симетричний.

Приклад 2. Виразити через елементарні симетричні многочлени $f(x, y) = x^3y + y^3x + 2x^2 + 2y^2$.

Розв'язання.

$$f(x, y) = x^3y + y^3x + 2x^2 + 2y^2 = xy\left(x^2 + y^2\right) + 2\left(x^2 + y^2\right) =$$

$$= \left(x^2 + y^2\right)(xy + 2) = \left((x + y)^2 - 2xy\right)(xy + 2) = \left(\sigma_1^2 - 2\sigma_2\right)(\sigma_2 + 2).$$

Приклад 3. Виразити через елементарні симетричні многочлени даний многочлен: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

Розв'язання.

Щоб виразити многочлен $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^3+x_2^3+x_3^3$ через елементарні симетричні многочлени, застосуємо загальну схему і метод невизначених коефіцієнтів. Складемо таблицю:

Система показників вищого члена			Вищий член	Відповідний добуток елементарних симетричних многочленів
x_1	x_2	x_3		
3	0	0	x_1^3	$\sigma_1^{3-0}\sigma_2^{0-0}\sigma_3^0=\sigma_1^3$
2	1	0	$ax_1^2x_2$	$a\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0=a\sigma_1\sigma_2$
1	1	1	$bx_1x_2x_3$	$b\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1=b\sigma_3$

При складанні всіх можливих систем показників вищого члена враховано, що сума показників у всіх змінних дорівнює степеню многочлена $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^3+x_2^3+x_3^3$ та послідовність показників у змінних x_1,x_2,x_3 не зростаюча. Тому

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\sigma_1^3+a\sigma_1\sigma_2+b\sigma_3,$$

де a,b – невизначені коефіцієнти. Обчислення коефіцієнтів a,b подаємо у вигляді таблиці:

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\sigma_1^3+a\sigma_1\sigma_2+b\sigma_3$
1	1	0	2	1	0	$2=2^3+a\cdot 2+b\cdot 0$
1	1	-2	0	-3	-2	$-6=0^3+a\cdot 0+b\cdot(-2)$

Розв'язуємо отриману систему:

$$\begin{cases}2=2^3+a\cdot 2+b\cdot 0,\\ -6=0^3+a\cdot 0+b\cdot(-2),\end{cases}\qquad \begin{cases}2=8+2a,\\ -6=-2b,\end{cases}\qquad \begin{cases}a=-3,\\ b=3.\end{cases}$$

Отже, $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^3+x_2^3+x_3^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$.

2.3. Результант та дискримінант двох многочленів

Нехай $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ і $g(x)=b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0$ – многочлени над полем P, де $a_n\neq 0, b_n\neq 0$ і $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ – корені $f(x)$.

Означення. *Результантом* многочленів $f(x)$ і $g(x)$ називається вираз виду $R(f,g)=a_n^m g(a_1)g(\alpha_2)...g(\alpha_n)$, де $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ – корені многочлена $f(x)$.

Результант $R(f,g)$ є симетричним многочленом від $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, тому результант двох довільних многочленів над полем P є елементом цього поля.

Властивості результанта:

Нехай $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_m$ – корені многочлена $g(x)$. Тоді:

1) $R(f,g)=a_n^m b_n^m \prod\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}(\alpha_i-\gamma_j)$,

2) $R(g,f)=(-1)^{mn}R(f,g)$.

Теорема 1. Для того, щоб $f(x)$ і $g(x)$ мали спільний корінь необхідно і достатньо, щоб їх результант дорівнював нулю.

Означення. *Дискримінантом* $D(f)$ многочлена $f(x)$ називається вираз виду $D(f)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_n^{-1}R(f,f')$, де $R(f,f')$ – результант $f(x)$ і його похідної $f'(x)$.

При цьому справджується рівність:

$$D(f)=a_n^{2n-2}\prod_{1\le j<i\le n}(\alpha_i-\alpha_j)^2,$$

де α_i – корені $f(x)$.

Теорема 2. Многочлен $f(x)$ має кратний корінь тоді і тільки тоді, коли його дискримінант дорівнює нулю.

При розв’язуванні задач інколи важко знайти корені многочлена $f(x)$, тому результант ще можна подати у *формі Сільвестра* (необхідно записати підряд m раз коефіцієнти многочлена $f(x)$, а потім n раз коефіцієнти многочлена $g(x)$, відповідно розміщуючи їх у детермінанті):

$$R(f,g)=\begin{array}{|cccccccccc|l} a_n & a_{n-1} & \dots & & a_1 & a_0 & & & & & \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & & a_1 & a_0 & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \left.\right\} m \text{ рядків} \\ & & a_n & a_{n-1} & \dots & & a_1 & a_0 & & & \\ & & & a_n & a_{n-1} & \dots & & a_1 & a_0 & & \\ b_m & b_{m-1} & & \dots & & b_1 & b_0 & & & & \\ & b_m & b_{m-1} & \dots & & & b_1 & b_0 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \left.\right\} n \text{ рядків} \\ & & & b_m & b_{m-1} & \dots & & b_1 & b_0 & & \\ & & & & b_m & b_{m-1} & \dots & & b_1 & b_0 & \end{array}$$

Під результантом двох многочленів розуміють детермінант Сільвестра для цих многочленів.

Теорема 3. Якщо результант $R(f,g)=0$, то або f і g мають спільний корінь, або обидва старші коефіцієнти дорівнюють 0.

Теорема 4. Якщо многочлени $f(x)$ і $g(x)$ мають спільний корінь, то $R(f,g)=0$.

Нехай задано систему двох алгебраїчних рівнянь з двома невідомими, що мають коефіцієнти з поля *P*: $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$.

<u>Схема виключення невідомих з цієї системи:</u>

1) Впорядкувати многочлени $f(x,y)$ і $g(x,y)$ за спадними степенями однієї із змінних, наприклад x;

2) Скласти результант $R(f,g)$, розглядаючи змінну y як параметр;

3) Знайти всі корені $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_l$ результанта;

4) Підставити в задану систему замість змінної y значення $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_l$. Отримаємо сукупність l систем двох рівнянь з одним невідомим x;

5) Розв'язати цю сукупність систем рівнянь і скласти відповідні пари розв'язків (α_{ki}, β_k).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Обчислити результант $R(f, g)$ для многочленів $f(x) = x^3 + 2x - 1, \quad g(x) = x^2 - 2x - 3$.

Розв'язання.

<u>І спосіб.</u> Многочлен $g(x) = x^2 - 2x - 3$ має корені $x = 3$, $x = -1$. Оскільки $R(f, g) = (-1)^{3\cdot 2} R(g, f) = R(g, f)$, то $R(f, g) = 1^3 f(3) f(-1) = 1 \cdot 32 \cdot (-4) = -128.$

<u>ІІ спосіб.</u> Нехай α_1, α_2 – корені многочлена $g(x)$. Тоді

$$R(f, g) = \left(\alpha_1^3 + 2\alpha_1 - 1\right)\left(\alpha_2^3 + 2\alpha_2 - 1\right) =$$

$$= (\alpha_1\alpha_2)^3 + 2\alpha_1^3\alpha_2 - \alpha_1^3 + 2\alpha_1\alpha_2^3 + 4\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1 - \alpha_2^3 - 2\alpha_2 + 1 =$$

$$= (\alpha_1\alpha_2)^3 + 4\alpha_1\alpha_2 + 1 + 2\alpha_1\alpha_2\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right) - \left(\alpha_1^3 + \alpha_2^3\right) - 2(\alpha_1 + \alpha_2).$$

За теоремою Вієта, $\alpha_1\alpha_2 = -3$ і $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$. Тоді

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2\alpha_1\alpha_2 = 10,$$

$$\alpha_1^3 + \alpha_2^3 = (\alpha_1 + \alpha_2)\left((\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 3\alpha_1\alpha_2\right) = 26.$$

Отже, $R(f, g) = -27 - 26 + 1 - 60 - 12 - 4 = -128.$

<u>ІІІ спосіб.</u> Обчислимо результант у формі Сільвестра:

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -75-8+5-10-30-10=-128.$$

Приклад 2. При якому значенні λ мають спільні корені наступні многочлени $f(x)=x^2+\lambda,\ \ g(x)=x^3-3x^2+\lambda x-3$.

Розв'язання.

Щоб многочлени мали спільні корені необхідно і достатньо, щоб їх результант був рівний нулю: $R(f,g)=0$.

Запишемо результант у формі Сільвестра:

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda \\ 1 & -3 & \lambda & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \lambda & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & 3\lambda-3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ \lambda & 3\lambda-3 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3(3\lambda-3)+3\lambda(3\lambda-3)=-9\lambda+9+9\lambda^2-9\lambda=$$

$$=9\lambda^2-18\lambda+9=(3\lambda-3)^2=0 \Rightarrow \ 3\lambda-3=0 \Rightarrow \ \lambda=1.$$

При $\lambda=1$ многочлени $f(x)$ і $g(x)$ мають спільні корені.

Приклад 3. При якому значенні λ має кратний корінь многочлен $f(x)=4x^3-\lambda x+1$.

Розв'язання.

Необхідною і достатньою умовою, щоб многочлен мав кратний корінь є рівність нулю дискримінанта. Обчислимо його у формі Сільвестра:

$f(x)=4x^3-\lambda x+1,$

$f'(x)=12x^2-\lambda,$

$$D(f, f')=\begin{vmatrix}4&0&-\lambda&1&0\\0&4&0&-\lambda&1\\12&0&-\lambda&0&0\\0&12&0&-\lambda&0\\0&0&12&0&-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&0&-\lambda&1&0\\0&4&0&-\lambda&-1\\0&0&2\lambda&-3&0\\0&12&0&-\lambda&0\\0&0&12&0&-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}4&0&-\lambda&1\\0&2\lambda&-3&0\\0&0&2\lambda&-3\\0&12&0&-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\lambda&-3&0\\0&2\lambda&-3\\12&0&-\lambda\end{vmatrix}=-4\lambda^3-108=0,$$

$4\lambda^3=108,$

$\lambda^3=27,$

$\lambda=3.$

При $\lambda=3$ цей многочлен має кратні корені.

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases}y^2-5y+4x-4=0,\\2y^2+y-x^2+1=0.\end{cases}$$

Розв'язання.

Розглянемо ліві частини кожного рівняння як многочлени від змінної y: $f(y)=y^2-5y+4x-4,\ g(y)=2y^2+y-x^2+1.$

Розв'язати систему рівнянь означає знайти спільні корені многочленів $f(y)$, $g(y)$. Тому записуємо умову, при якій многочлени мають спільний корінь:

$$R(f,g)=\begin{vmatrix}1&-5&4x-4&0\\0&1&-5&4x-4\\2&1&-x^2+1&0\\0&2&1&-x^2+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-5&4x-4&0\\0&1&-5&4x-4\\0&11&\left(-x^2-8x+9\right)&0\\0&2&1&-x^2+1\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 4x-4 \\ 11 & -x^2-8x+9 & 0 \\ 2 & 1 & -x^2+1 \end{vmatrix} = \left(x^2-1\right)\left(x^2+8x-9\right)+\left(4x-4\right)11+$$

$$+2\left(4x-4\right)\left(x^2+8x-9\right)-55\left(x^2-1\right)=x^4+16x^3+101x^2-188x+70=0$$

$$\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=2, \\ x_3=\left(-19-\sqrt{117}\right)/2. \end{cases}$$

Підставляємо значення x_1 і x_2 у систему і одержуємо сукупність двох рівнянь з одним невідомим y:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^2-5y=0, \\ 2y^2+y=0, \end{cases} \\ \begin{cases} y^2-5y+4=0, \\ 2y^2+y-3=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв’язуємо цю сукупність рівнянь і складаємо пари розв’язків:

$$\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=2, \\ y_2=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=\dfrac{-19-\sqrt{117}}{2}, \\ y_3=\dfrac{9\pm\sqrt{117}}{2}. \end{cases}$$

Отже, $(1;0)$, $(2;1)$, $\left(\dfrac{-19-\sqrt{117}}{2};\dfrac{9\pm\sqrt{117}}{2}\right)$.

РОЗДІЛ 3.МНОГОЧЛЕНИ НАД ЧИСЛОВИМИ ПОЛЯМИ

3.1. Многочлени над полем комплексних чисел

Теорема 1. Многочлен непарного степеня над полем R дійсних чисел має принаймні один дійсний корінь.

Теорема 2. Кожний многочлен степеня $n \geq 1$ з дійсними коефіцієнтами має принаймні один комплексний корінь.

Теорема 3. (Основна теорема теорії многочленів)

Довільний многочлен ненульового степеня з комплексними коефіцієнтами $f(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$ має хоча б один комплексний корінь.

Теорема 4. Кожний многочлен, степінь якого вища за одиницю, звідний у полі комплексних чисел.

Наслідок. Для того, щоб многочлен був незвідним у полі комплексних чисел, необхідно і достатньо, щоб його степінь дорівнював 1.

Теорема 5. Кожний многочлен n–го степеня у полі комплексних чисел єдиним чином (з точністю до порядку множників) розкладається на лінійні множники у цьому полі:

$$f(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n),$$

де z_i – корені, a_n – старший коефіцієнт многочлена $f(x)$.

Терема 6. Многочлен n–го степеня у полі комплексних чисел має точно n коренів.

Очевидно, що всі корені многочлена $f(z)$ над полем комплексних чисел належать цьому ж полю, тобто полем розкладу будь–якого многочлена $f(z)$ з комплексними коефіцієнтами є поле C (поле комплексних чисел). Отже, поле C комплексних чисел є алгебраїчно замкнутим.

Для коренів $z_1, z_2, ..., z_n$ алгебраїчного рівняння n–го степеня справедливі ***формули Вієта***:

$$z_1 + z_2 + ... + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + \ldots + z_{n-1} z_n = -\frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4. + \ldots + z_{n-2} z_{n-1} z_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n},$$

....

$$z_1 z_2 \ldots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Знайти многочлен найменшого степеня, в якого число 2 подвійний корінь, а $2i, 3+i,\ 3-i$ прості корені.

Розв'язання.

Виходячи з умови, многочлен $f(x)$ можна розкласти на незвідні множники над полем C:

$$f(x) = (x-2)^2 (x-2i)\big(x-(3+i)\big)\big(x-(3-i)\big) =$$
$$= -\left(x^2-4x+4\right)(x-2i)\left(x^2-3x+3ix-3x-3ix+10\right) =$$
$$= \left(x^3-4x^2+4x-2ix^2+8ix-8i\right)\left(x^2-6x+10\right) =$$
$$= x^5 + x^4(-4-2i-6) + x^3(4+8i+24+12i+10) +$$
$$+ x^2(-8i-24-48-40-20i) + x(48i+40+80i) - 80i =$$
$$= x^5 - x^4(2i+10) + x^3(20i+38) - x^2(76i+64) + x(128i+80) - 80i.$$

Приклад 2. Знайти суму кубів коренів многочлена $f(x) = x^3+2x^2+x-3$.

Розв'язання.

Нехай x_1, x_2, x_3 – корені многочлена $f(x)$. За теоремою Вієта маємо систему:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-2, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1, \\ x_1x_2x_3=3. \end{cases}$$

Суму кубів коренів многочлена знайдемо за формулою симетричних сум:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3-3(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)+3x_1x_2x_3=$$

$$=(-2)^3-3(-2)+3\cdot 3=-8+6+9=7.$$

Приклад 3. Знайти зведені многочлени, в яких корені задовольняють умову: $y_1=x_2x_3,\ y_2=x_1x_3,\ y_3=x_1x_2$, а x_1,x_2,x_3 є коренями многочлена $f(x)=x^3-2x-5$.

Розв'язання.

Запишемо многочлен

$$f(y)=(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)=(y-x_2x_3)(y-x_1x_3)(y-x_1x_2)=$$

$$=y^3-y^2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)+y(x_1x_2x_3)(x_1+x_2+x_3)-(x_1x_2x_3)^3.$$

За теоремою Вієта при умові, що $x_1,\ x_2,\ x_3$ – корені многочлена $f(x)=x^3-2x-5$, маємо:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-2, \\ x_1x_2x_3=-5. \end{cases}$$

Отримаємо : $f(x)=y^3+2y^2+25.$

Приклад 4. Розкласти на незвідні множники многочлен $f(x)=x^4-10x^2+169$ над полем C.

Розв'язання.

Знайдемо корені рівняння $f(x)=x^4-10x^2+169=0$. Розв'яжемо біквадратне рівняння, ввівши заміну $x^2=t$, отримаємо: $t^2-10t+169=0$.

$$D=100-676=-576=(24i)^2,$$

$$t_1=\frac{10+24i}{2}=5+12i,\quad t_2=\frac{10-24i}{2}=5-12i,$$

$x^2 = 5+12i,$ $\qquad\qquad\qquad$ $x^2 = 5-12i,$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{5+12i} = \pm\left(\frac{\sqrt{\sqrt{5^2+12^2}+5}}{2} + i\frac{\sqrt{\sqrt{5^2+12^2}-5}}{2}\right) = \pm(3+2i),$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{5-12i} = \pm\left(\frac{\sqrt{\sqrt{5^2+12^2}+5}}{2} - i\frac{\sqrt{\sqrt{5^2+12^2}-5}}{2}\right) = \pm(3-2i).$$

Тоді маємо, що

$$f(x) = (x-3-2i)(x+3+2i)(x-3+2i)(x+3-2i).$$

Приклад 5. Корені многочлена $f(x)$ утворюють арифметичну прогресію. Знайти цей многочлен і його корені, якщо $f(x) = x^3 - 18x^2 + qx + 24.$

Розв'язання.

Нехай a, b, c – корені многочлена $f(x)$. Так як вони утворюють арифметичну прогресію, то виконується така умова: $2b = a + c.$

За теоремою Вієта маємо: $\begin{cases} a+b+c=18, \\ ab+bc+ac=q, \\ abc=-24. \end{cases}$

Складемо систему, враховуючи умову задачі:

$$\begin{cases} a+b+c=18, \\ ab+bc+ac=q, \\ abc=-24, \\ a=2b-c. \end{cases}$$

Розв′язавши її, отримаємо такі значення: $\begin{cases} a=6\mp2\sqrt{10}, \\ b=6, \\ c=6\pm2\sqrt{10}, \\ q=68. \end{cases}$

Отже, $f(x) = x^3 - 18x^2 + 68x + 24.$

3.2. Многочлени над полем дійсних чисел

Нехай $f(z)=a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1 z + a_0$ (7) многочлен з дійсними коефіцієнтами.

Теорема 1. Якщо комплексне число z_0 є коренем многочлена (7), то спряжене комплексне число $\overline{z_0}$ також є коренем цього многочлена.

Теорема 2. Якщо комплексне число z_0 є коренем k–ї кратності многочлена (7), то спряжене комплексне число $\overline{z_0}$ є коренем многочлена тієї ж кратності.

Теорема 3. Кожний многочлен над полем R, степінь якого перевищує 2, є звідним у цьому полі.

Теорема 4. Кожний многочлен $f(z)$ над полем R дійсних чисел допускає єдиний розклад на незвідні множники (лінійні і квадратні тричлени) в цьому полі виду:

$$f(z)=a_n(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}...(z-z_l)^{k_l}\left(z^2+p_{l+1}z+q_{l+1}\right)^{k_{l+1}}...\left(z^2+p_m z+q_m\right)^{k_m}.$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^4-x^3-11x^2+31x-20=0$, якщо $x_1=2+i$.

Розв'язання.

Задане рівняння має дійсні коефіцієнти, тому число $(2-i)$ теж є коренем, а многочлен $x^4-x^3-11x^2+31x-20$ ділиться на $g(x)$ (наслідок з теореми Безу), де

$$g(x)=(x-2-i)(x-2+i)=x^2-2x-ix-2x+4+2i+ix-2i+1=$$
$$=x^2-4x+5.$$

Виконаємо ділення ”кутом”:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^4-x^3-11x^2+31x-20 & \underline{x^2-4x+5} \\
\underline{x^4-4x^3+5x^2\qquad\qquad} & x^2+3x-4 \\
-\;3x^3-16x^2+31x\qquad & \\
\underline{3x^3-12x^2+15x\qquad} & \\
-\;-4x^2+16x-20 & \\
\underline{-4x^2+16x-20} & \\
0 &
\end{array}
$$

Щоб знайти інші корені заданого рівняння, розв’яжемо рівняння $x^2+3x-4=0$. Маємо $x=-4,\ x=1$.

Отже, $x_1=2+i,\ x_2=2-i,\ x_3=4,\ x_4=1$.

Приклад 2. Число $-3+i$ є коренем рівняння з дійсними коефіцієнтами $x^3+x^2+ax+b=0$. Знайти a і b та два інші корені.

Розв’язання.

Оскільки $x_1=-3+i$ корінь рівняння, то $x_2=-3-i$ теж корінь. Поділимо многочлен $f(x)=x^3+x^2+ax+b$ на $g(x)$, де $g(x)=(x-(-3+i))(x-(-3-i))=x^2+3x+ix+3x-ix+9+1=$ $=x^2+6x+10$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^3+x^2+ax+b\qquad & \underline{x^2+6x+10} \\
\underline{x^3+6x^2+10x\qquad\quad} & x-5 \\
-\;-5x^2+(a-10)x+b & \\
\underline{-5x^2-30x-50\quad} & \\
(a+20)x+(b+50)=r(x) &
\end{array}
$$

Для того, щоб $f(x)\vdots g(x)$, необхідно і достатньо, щоб $r(x)=0$.

$(a+20)x+b+50=0$, $x\neq 0$, тому $\begin{cases} a=-20, \\ b=-50. \end{cases}$.

Отже, $x_1=-3+i,\ x_2=-3-i,\ x_3=5$ та $a=-20,\ b=-50$.

Приклад 3. Многочлен $f(x)=x^4-2x^3+6x^2-18x+a$ має суто уявний корінь. Знайти дійсне число a і всі корені цього многочлена.

Розв'язання.

Нехай задане рівняння має дійсні коефіцієнти і суто уявний корінь $x_1 = bi$, тому $x_2 = -bi$ також є коренем, а многочлен $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 18x + a$ ділиться на $g(x)$ (наслідок з теореми Безу) $f(x) = g(x)s(x)$, де $g(x) = $ $= (x - bi)(x + bi) = x^2 + b^2$.

Виконаємо ділення "кутом":

$$
\begin{array}{l|l}
-\; x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 18x + a & \underline{x^2 + b^2} \\
\quad \underline{x^4 + b^2x^2} & x^2 - 2x + (6 - b^2) = s(x) \\
\qquad -\; -2x^3 + (6 - b^2)x^2 & \\
\qquad\quad \underline{-2x^3 - b^2x} & \\
\qquad\qquad -\; (6 - b^2)x^2 + (18 + 2b^2)x + a & \\
\qquad\qquad\quad \underline{(6 - b^2)x^2 + (6 - b^2)b^2} & \\
\qquad\qquad\qquad (18 + 2b^2)x - (6 - b^2)b^2 + a = r(x) = 0 &
\end{array}
$$

З рівності многочленів, отримаємо систему:

$$
\begin{cases} -18 + 2b^2 = 0, \\ -(6 - b^2)b^2 + a = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -27, \\ b = \pm 3. \end{cases}
$$

Отримаємо $x_{1,2} = \pm 3i$. Інші корені рівняння знайдемо з умови, що $s(x) = 0$:

$x^2 - 2x - 3 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x_3 = 3, \;\; x_4 = -1.$

Отже, $a = -27$, $x_{1,2} = \pm 3i$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1$.

3.3. Рівняння третього степеня

Нехай $x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ – рівняння третього степеня з комплексними коефіцієнтами. За допомогою підстановки $x=y-\frac{a_2}{3}$ зведемо його до виду $x^3+px+q=0$. (8)

Число $D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ називають *дискримінантом рівняння* $x^3+px+q=0$. Корені цього рівняння знаходять за формулою $x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}$, яка називається *формулою Кардано.*

Якщо $u_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}$ і $v_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}$ є тими значеннями кубічних коренів, при яких $x_1=u_1+v_1$ є коренями рівняння $x^3+px+q=0$, то решту коренів цього рівняння обчислюють так:

$$x_2=-\frac{1}{2}(u_1+v_1)+\frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1-v_1),$$

$$x_3=-\frac{1}{2}(u_1+v_1)-\frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1-v_1).$$

Числа u_1,v_1 знаходяться з умови $u_1v_1=-\frac{p}{3}$.

Якщо коефіцієнти p і q рівняння (8) є дійсними числами, то:

1) при $D>0$ рівняння має один дійсний корінь і два комплексних спряжених корені;

2) при $D=0$ рівняння має три дійсних корені, два з яких дорівнюють один одному;

3) при $D<0$ рівняння має три дійсних різних корені.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. При яких дійсних значеннях a рівняння $ax^3 - 3x + 2a = 0$ має один дійсний корінь і два комплексних корені.

Розв'язання.

Щоб рівняння мало один дійсний корінь і два комплексних корені треба, щоб $D > 0$.

$$D = \frac{4a^2}{4} + \frac{-27}{27} = a^2 - 1,$$

$$D > 0 \Rightarrow a^2 - 1 > 0, a^2 > 1.$$

Тому такі корені будуть при $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Приклад 2. Довести, що корені рівняння $x^3 + 3ax^2 - 3a^3 = 0$ є дійсними при будь–якому дійсному значенню числа a.

Розв'язання.

Зведемо це рівняння до виду (8), ввівши заміну: $x = y - \frac{3a}{3} = y - a$. Отримаємо:

$$(y - a)^3 + 3a(y - a)^2 - 3a^3 = 0,$$

$$y^3 - 3y^2a + 3ya^2 - a^3 + 3ay^2 - 6a^2y + 3a^3 - 3a^3 = 0,$$

$$y^3 - 3a^2y - a^3 = 0.$$

Щоб корені рівняння були дійсними при будь–якому дійсному значенню числа a треба, щоб виконувалася умова, що $D < 0$.

Обчислимо дискримінант цього рівняння:

$$D = \frac{a^6}{4} - \frac{27a^6}{27} = \frac{a^6}{4} - a^6 = -\frac{3}{4}a^6 < 0.$$

Як бачимо умова виконується.

Отже, рівняння має три різних дійсних корені при будь–якому дійсному значенню числа a, що і треба було довести.

Приклад 3. Розв'язати рівняння: $x^3+6ix+4+4i=0$.

Розв'язання.

Дане рівняння є рівнянням виду (8), тому обчислюємо його дискримінант ($p=6i,\ q=4+4i$).

$$D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{(4+4i)^2}{4}+\frac{(6i)^3}{27}=8i-8i=0.$$

Тоді $x_1=\sqrt[3]{-2-2i}+\sqrt[3]{-2-2i}=2\sqrt[3]{-2-2i}$,

$$x_{2,3}=-\frac{1}{2}\left(2\sqrt[3]{-2-2i}\right)\pm\frac{1\sqrt{3}}{2}(0)=-\sqrt[3]{-2-2i}.$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння: $2x^3-3x^2+1=0.$

Розв'язання.

Зведемо це рівняння до рівнянням виду (8), помноживши спершу обидві його частини на $\frac{1}{2}$: $x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}=0.$

Виконаємо заміну $x=y-\dfrac{-3/2}{3}=y+\dfrac{1}{2}$.

$$\left(y+\frac{1}{2}\right)^3-\frac{3}{2}\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=0,$$

$$y^3+\frac{3}{2}y^2+\frac{3}{4}y+\frac{1}{8}-\frac{3}{2}y^2-\frac{3}{2}y-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=0,$$

$$\left(y+\frac{1}{2}\right)^3-\frac{3}{2}\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=0.$$

Отримаємо: $y^3-\frac{3}{2}y+\frac{1}{4}=0$.

Знаходимо дискримінант: $D=\frac{1}{64}-\frac{1}{64}=0.$

Тоді $x_1=\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=2\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=-1,\quad x_{2,3}=-\frac{1}{2}\left(2\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}\right)=\frac{1}{2}.$

3.4. Розміщення дійсних коренів многочлена. Число дійсних коренів

Всі корені многочлена $f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0$ лежать всередині круга з центром у точці 0 і радіусом $N_0=1+\dfrac{A}{|a_n|}$; $A=\max\{|a_{n-1}|,|a_{n-2}|,...,|a_1|,|a_0|\}$.

Комплексні корені многочлена з дійсними коефіцієнтами розміщені симетрично відносно дійсно осі.

Теорема 1. Всі дійсні корені многочлена $f(x)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0$ містяться в інтервалі $(-N_0,N_0)$, де $N_0=1+\dfrac{A}{|a_n|}$, $A=\max\{|a_{n-1}|,|a_{n-2}|,...,|a_1|,|a_0|\}$.

Одним з методів знаходження меж дійсних коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами є *метод Ньютона*.

Число N_0 дає одночасно верхню межу додатніх коренів многочлена і нижню межу його від'ємних коренів, тобто інтервал $(-N_0,N_0)$.

Теорема 2 (Ньютона). Число M є верхньою межею додатніх коренів многочлена $f(x)$, якщо при $x=M$ многочлен $f(x)$ має додатнє значення, а всі його похідні – невід'ємні значення.

Якщо N_0,N_1,N_2 і N_3 – верхні межі відповідно додатніх коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами $f(x)$, $y^nf\left(\dfrac{1}{y}\right)$, $f(-y)$ *і* $y^nf\left(-\dfrac{1}{y}\right)$, то додатні корені многочлена $f(x)$ знаходяться у проміжку $\left(\dfrac{1}{N_1};N_0\right)$, а від'ємні – у проміжку $\left(-N_2;-\dfrac{1}{N_3}\right)$.

Число дійсних коренів рівняння з дійсними коефіцієнтами можна визначити за правилом Декарта.

Означення. Нехай $c_1,\ c_2,..,\ c_m$ – деяка впорядкована послідовність дійсних чисел. Кількість пар сусідніх чисел цієї послідовності, які мають протилежні знаки, називається *кількістю змін знаків даної послідовності*. Коли перше й останнє числа $c_1,\ c_m$ даної послідовності мають однакові знаки, то кількість змін знаків у послідовності парна; якщо $c_1,\ c_m$ мають протилежні знаки, то кількість змін знаків – непарна.

Правило Декарта:

Число додатніх коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ дорівнює числу змін знаків у послідовності його коефіцієнтів або на парне число менше.

Це правило можна застосувати і для оцінки кількості від'ємних коренів многочлена $f(x)$ за допомогою заміни $x = -y$.

Введемо такі позначення: M_+ – верхня межа додатніх коренів, m_+ – нижня межа додатніх коренів, $m\_$ – нижня межа від′ємних коренів, $M\_$ – верхня межа від′ємних коренів.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Знайти верхню межу додатніх коренів многочлена $f(x) = x^4 - 8x + 1$ методом Ньютона.

Розв'язання.

Нехай 1 є верхньою межею додатніх коренів. Перевіримо, чи це дійсно так. Ділимо ліву частину на $(x-1)$ за схемою Горнера і маємо:

	1	0	0	–8	1
1	1	1	1	–7	–6

В нижньому рядку таблиці одержали від′ємні числа, це означає, що число 1 не є верхньою межею додатніх коренів. Вже при М = 2 від'ємних коефіцієнтів в таблиці немає:

	1	0	0	–8	1
1 2	1 1	1 2	1 4	–7 0	–6 1

Візьмемо число М = 1,9 < 2, отримаємо в рядку від'ємні числа:

	1	0	0	–8	1
1 1,9 2	1 1 1	1 1.9 2	1 3.61 4	–7 –1.141 0	–6 –1.167 1

Тому можна взяти 2 в якості верхньої межі додатніх коренів: $M_+ = 2$.

Приклад 2. Знайти нижню межу додатніх коренів многочлена $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + x^2 + 1$ методом Ньютона.

Розв'язання.

Для знаходження нижньої межі додатніх коренів зробимо заміну $x = \frac{1}{t}$ і маємо рівняння $t^4 + t^2 - 3t + 5 = 0$.

За схемою Горнера перевіримо М = 1,3:

	1	0	1	–3	5
1,3	1	1,3	2,69	0,5	5,6

При М = 1,3 від'ємних коефіцієнтів немає, але вже при М = 1,2 отримуємо в рядку від′ємні числа:

	1	0	1	–3	5
1,3 1,2	1 1	1,3 1,2	2,69 2,44	0,5 –0,56	5,6 4,32

Це значить, що за нижню межу додатніх коренів можна взяти 1,3: $m_+ = 1,3$.

Приклад 3. Знайти межі додатніх і від'ємних коренів многочлена $f(x) = x^5 + 3x^4 - 3x^3 - 25x^2 - 41x - 18$.

Розв'язання.

Якщо $N_0, N_1, N_2\, i\, N_3$ – верхні межі відповідно додатніх коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами $f(x),\ y^n f\left(\frac{1}{y}\right),\ f(-y)\ i\ \ y^n f\left(-\frac{1}{y}\right)$, то додатні корені многочлена $f(x)$ знаходяться у проміжку $\left(\frac{1}{N_1}; N_0\right)$, а від'ємні відповідно у проміжку $\left(-N_2; -\frac{1}{N_3}\right)$.

Знайдемо спочатку верхню межу додатніх коренів за формулою $N_0 = 1 + \frac{A}{|a_n|}$, $A = \max\{|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, ..., |a_1|, |a_0|\}$.

Тут $a_n = 1$, $A = 41$. Отже $N_0 = 1 + \frac{41}{1} = 42$. Але це занадто велике число. Перевіримо за теоремою Ньютона, чи не буде верхньою межею, наприклад, число 4. Для цього, користуючись схемою Горнера, знайдемо значення всіх похідних від $f(x)$ при $x = 4$, причому нас цікавлять не самі значення похідних, а їх знаки:

	1	3	–3	–25	–41	–18
4	1	7	25	75	259	+

(замість остачі поставимо знак +, бо видно, що вона додатня).

Оскільки коефіцієнти за схемою Горнера будуються за допомогою тільки додавання і множення, а в другому рядку цієї схеми стоять лише додатні числа, то при наступних діленнях від'ємні коефіцієнти з'явитись не можуть.

А тому всі остачі, отже і похідні від $f(x)$ при $x = 4$ будуть додатні. Число 4 теж є верхня межа додатніх коренів

$f(x)$. Але ми шукаємо таку цілочисельну верхню межу N_0, що $(N_0 - 1)$ вже не задовольняє умову теореми Ньютона.

Перевіримо, чи не буде верхньою межею число 2. Складемо схему Горнера для $\alpha = 2$:

	1	3	–3	–25	–41	–18
2	1	5	7	–11	–63	–

Із схеми видно, що $f(2) < 0$. Число 2 не є верхня межа коренів. Перевіримо ще число 3:

	1	3	–3	–25	–41	–18
3	1	6	15	20	19	+

З наведених вище міркувань робимо висновок, що число 3 задовольняє умові теореми Ньютона, а тому і є верхня межа додатніх коренів $f(x)$. Причому 3 є найменша з цілочисельних верхніх меж, бо 2 вже не є верхня межа.

Отже N_0 = 3.

Для знаходження нижньої межі від'ємних коренів $f(x)$ розглянемо многочлен:

$$f_2(y) = -f(-x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 25x^2 - 41x + 18.$$

Знайдемо межу: $N_0 = 1 + \dfrac{41}{1} = 42$. Але знову ж це занадто велике число. Перевіримо за теоремою Ньютона, чи не буде верхньою межею многочлена $f_2(y)$, наприклад, число 3:

	1	–3	–3	25	–41	18
3	1	0	–3	16	7	+
3	1	3	6	+	+	

Знову одержали рядок із додатніх чисел. При наступних діленнях всі числа так само будуть додатні, а тому 3 є верхня межа. Перевіримо, чи не буде верхньою межею число 2:

	1	–3	–3	25	–41	18
2	1	–1	–5	15	–11	–4

Оскільки $f(2) = -4 < 0$, то число 2 не є верхня межа додатніх коренів многочлена $f_2(y)$ і $N_2 = 3$.

Число –3 є нижня межа від’ємних коренів многочлена $f(x)$.

Аналогічно знаходимо верхні межі додатніх коренів для многочленів:

$$f_1(z) = -z^5 f\left(\frac{1}{z}\right) = 18z^5 + 41z^4 + 25z^4 + 3z^2 - 3z - 1,$$

$$f_3(u) = -u^5 f\left(-\frac{1}{u}\right) = 18u^5 - 41u^4 + 25u^3 - 3u^2 - 3u + 1.$$

Це будуть відповідно $N_1 = 1$ і $N_3 = 2$, а тому нижня межа додатніх коренів многочлена $f(x)$ буде $\frac{1}{1} = 1$, верхня межа від’ємних коренів буде $-\frac{1}{2}$.

Таким чином, додатні корені многочлена $f(x)$ розташовані між числами 1 і 3, від’ємні корені – між числами -3 і $-\frac{1}{2}$.

3.5. Відокремлення коренів методом Штурма

Щоб відокремити дійсні корені $f(x)$, необхідно знайти інтервали, у кожному з яких лежить лише один корінь. Це можна зробити методом Штурма.

Припускаємо, що $f(x)$ вже не має кратних коренів.

Спочатку побудуємо ряд Штурма: $f(x)$, $f'(x), F_1(x)$, $F_2(x), ..., F_{m-1}(x), F_m(x)$.

Щоб знайти многочлен $F_i(x), 1 \le i \le m$, застосуємо алгоритм, подібний алгоритму Евкліда:

$$f(x) = f'(x)\Phi_1(x) - F_1(x),$$
$$f'(x) = F_1(x)\Phi_2(x) - F_2(x),$$
$$F_1(x) = F_2(x)\Phi_3(x) - F_3(x),$$
....
$$F_{m-2}(x) = F_{m-1}(x)\Phi_m(x) - F_m(x),$$
$$F_{m-1}(x) = F_m(x)\Phi_{m+1}(x).$$

Властивості ряду Штурма:

Лема 1. Ніякі дві сусідні функції ряду Штурма не мають спільних коренів.

Лема 2. Якщо α є коренем однієї з проміжних функцій ряду Штурма, то значення сусідніх з нею функцій ряду мають у цій точці протилежні знаки.

Лема 3. Якщо x, зростаючи, проходить через корінь якої–небудь проміжної функції ряду Штурма, але не проходить через корінь $f(x)$, то число змін знаків у ряді Штурма при цьому не зміниться;

Лема 4. Якщо x, зростаючи, проходить через корінь многочлена $f(x)$, то число змін знаків у ряді Штурма зменшується на одиницю.

Теорема Штурма.

Якщо a і b $(a < b)$ – довільні дійсні числа, які не є коренями $f(x)$, то число p дійсних коренів многочлена $f(x)$ в інтервалі (a,b) дорівнює $p = s(a) - s(b)$, де $s(a)$ і $s(b)$ є число змін знаків у ряді Штурма відповідно у точках a і b.

Застосування теореми Штурма:

1) Для будь–якого многочлена $f(x)$ над полем дійсних чисел можна точно визначити загальне число дійсних коренів, а також число його додатніх і від’ємних коренів;

2) Відокремлення дійсних коренів;

3) Встановлення ознаки, чи всі n коренів многочлена $f(x)$ n–го степеня є різні дійсні числа.

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Знайти число дійсних коренів для многочлена $f(x) = x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 4x + 4$ на проміжку [2,4].

Розв’язання.

Щоб побудувати ряд Штурма, знайдемо похідну: $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 12x + 4 = 2\left(2x^3 - 3x^2 - 6x + 2\right)$. Тоді в якості $F_0(x)$ можна взяти $\left(2x^3 - 3x^2 - 6x + 2\right)$.

Ділимо $f(x)$ на $f'(x)$:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 4x + 4 & \underline{2x^3 - 3x^2 - 6x + 2} \\
- & 2x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 8x + 8 & x - 1 \\
 & \underline{2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 2x} & \\
 & x^3 - 6x^2 + 6x + 8 & \\
- & 2x^3 - 12x^2 + 12x + 16 & \\
 & \underline{2x^3 - 12x^2 + 12x + 16} & \\
 & -15x^2 + 6x + 18 &
\end{array}
$$

Остача $r_1(x) = -15x^2 + 6x + 18$. Тому $F_1(x) = 5x^2 - 2x - 6$.

Далі ділимо $F_0(x)$ на $F_1(x)$:

$$
\begin{array}{rl}
\ 2x^3-3x^2-6x+2 & \big|\ \underline{5x^2-2x-6} \\
-\ 10x^3-15x^2-30x+10 & \big|\ 2x-11 \\
\underline{10x^3-4x^2-12x} & \\
-11x^2-18x+10 & \\
-\ -55x^2-90x+50 & \\
\underline{-55x^2-90x+50} & \\
-112x-16 & \Rightarrow F_2(x)=7x+1.
\end{array}
$$

Далі ділимо $F_1(x)$ на $F_2(x)$:

$$
\begin{array}{rl}
5x^2-2x-6 & \big|\ \underline{7x+1} \\
-\ 35x^2-14x-42 & \big|\ 5x-19 \\
\underline{35x^2-14x} & \\
-19x-42 & \\
-\ -133x-294 & \\
\underline{-133x-19} & \\
-275 & \Rightarrow F_3(x)=1.
\end{array}
$$

Тоді остаточно маємо

$F_{-1}(x)=x^4-2x^3-6x^2+4x+4,$

$F_0(x)=4x^3-6x^2-12x+4,$

$F_1(x)=5x^2-2x-6$

$F_2(x)=7x+1,$

$F_3(x)=1.$

Побудуємо таблицю:

	$f(x)$	$F_0(x)$	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$S(x)$
2	–	–	+	+	+	1
4	+	+	+	+	+	0

$S(2)=1$ – одна зміна знаку, $S(4)=0$ – змін знаку немає.

При зростанні x від 2 до 4 число кількості змін знаків в ряді Штурма дорівнює $S(2)-S(4)=1$, тобто на проміжку [2,4] знаходиться один дійсний корінь.

Приклад 2. Відокремити дійсні корені многочлена $f(x) = -8x^3 + 16x - 2$.

Розв'язання.

Дійсні корені лежать в інтервалі $(-N_0; N_0)$, де $N_0 = 1 + \dfrac{A}{(a_n)}$. В даному випадку $N_0 = 1 + \dfrac{16}{8} = 3$, тому розглядаємо інтервал (–3, 3).

Побудуємо ряд Штурма.

$f'(x) = -24x^2 + 16 = 4(-6x^2 + 4)$, тоді в якості $F_0(x)$ можна взяти $(-6x^2 + 4)$.

Ділимо $f(x)$ на $f'(x)$:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & -8x + 16x - 2 & \underline{-6x^2 + 4} \\
- & -24x + 48x - 6 & 4x \\
 & \underline{-24x + 16x} & \\
 & 32x - 6 \ \Rightarrow F_1(x) = -16x + 3 &
\end{array}
$$

Далі ділимо $F_0(x)$ на $F_1(x)$:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & -6x^2 + 4 & \underline{-16x + 3} \\
- & -48x^2 + 32 & 3x \\
 & \underline{-48x^2 + 9} & \\
 & 23 \quad \Rightarrow F_2(x) = -1. &
\end{array}
$$

Для $f(x)$ маємо:

$F_{-1}(x) = -8x^3 + 16x - 2,\ F_0(x) = -6x^2 + 4,\ F_1(x) = -16x + 3, F_2(x) = -1$.

Складемо таблицю:

x	$F_{-1}(x)$	$F_0(x)$	$F_1(x)$	F_2	$S(x)$
–3	+	–	+	–	3
–2	+	–	+	–	3
–1	–	–	+	–	2
0	–	+	+	–	2

1	+	–	–	–	1
2	–	–	–	–	0
3	–	–	–	–	0

З таблиці видно, що один корінь лежить в інтервалі (–2;–1), бо $s(-2)-s(-1)=1$, другий корінь знаходиться в інтервалі (0;1), бо $s(0)-s(1)=1$, а третій – в інтервалі (1;2), бо $s(1)-s(2)=1$.

3.6. Многочлени над полем раціональних чисел

Існують многочлени з раціональними коефіцієнтами як завгодно високого степеня, незвідні у полі раціональних чисел.

Будь–яке алгебраїчне рівняння з раціональними коефіцієнтами можна звести до рівняння з цілими коефіцієнтами множенням на спільний знаменник усіх цих коефіцієнтів.

Означення. Многочлен $p(x)$ з цілими коефіцієнтами називається *примітивними*, якщо його коефіцієнти не мають спільних дільників, відмінних від ± 1.

Лема. Добуток двох примітивних многочленів є примітивним многочленом.

Теорема 1. Для того, щоб многочлен $f(x)$ з цілими коефіцієнтами був звідним у полі Q раціональних чисел, необхідно і достатньо, щоб він був звідним у кільці Z цілих чисел, тобто щоб існували многочлени $f_1(x)$ і $f_2(x)$ ненульового степеня з цілими коефіцієнтами такі, що $f(x) = f_1(x) f_2(x)$.

Теорема 2 (Критерій Ейзенштейна незвідності у полі раціональних чисел многочленів з кільця $Q[x]$).

Якщо в многочлені з цілими коефіцієнтами $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ діляться на деяке просте число p, причому a_0 не ділиться на p^2, а старший коефіцієнт a_n не ділиться на p, то многочлен $f(x)$ незвідний у полі раціональних чисел.

З теореми випливає існування многочленів довільного степеня з цілими коефіцієнтами, незвідних у полі раціональних чисел.

Теорема 3. У кільці многочленів над полем раціональних чисел є многочлени довільного степеня, незвідні у полі Q.

Теорема 4. Якщо многочлен $f(x)$ з раціональними коефіцієнтами, степінь якого більший за одиницю, має хоча б один раціональний корінь r, то $f(x)$ звідний у полі раціональних чисел.

Теорема 5. Якщо многочлен третього степеня $f(x)$ з раціональними коефіцієнтами не має раціональних коренів, то він незвідний у полі раціональних чисел.

Теорема 6. Щоб число $\frac{p}{q}$, де $(p,q)=1$ було коренем рівняння $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ з цілими коефіцієнтами необхідно, щоб p було дільником вільного члена a_0, а q – дільником старшого коефіцієнта a_n цього рівняння.

Наслідок. Якщо старший коефіцієнт рівняння з цілими коефіцієнтами рівний 1, то всі раціональні корені цього рівняння є цілі числа і є дільники вільного члена.

Теорема 7. Для того, щоб дріб $\frac{p}{q}$, де $(p,q)=1$ був раціональним коренем многочлена з цілими коефіцієнтами $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, необхідно, щоб при довільному цілому k число $f(k)$ ділилося на $p - qk$, якщо $p - qk \neq 0$.

Ця умова використовується частіше для $k = \pm 1$, при цьому числа $\frac{f(1)}{p-q}$ і $\frac{f(-1)}{p+q}$ мають бути цілими.

Наслідок. Якщо старший коефіцієнт a_n многочлена $f(x)$ з цілими коефіцієнтами дорівнює одиниці, то його раціональними коренями можуть бути лише такі цілі числа p, для яких $f(k)$ ділиться на $p - k$ при будь–якому k цілому, при якому $p - k \neq 0$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Розв'зати рівняння $2x^3-5x^2+6x-2=0$.

Розв'язання.

Знайдемо спочатку раціональні корені рівняння (якщо вони є). Раціональними коренями тут можуть бути числа виду $\frac{p}{q}$: $\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{2}$.

Знайдемо межі дійсних коренів даного рівняння:

$N_0=1+\frac{A}{|a_n|}=1+\frac{6}{2}=4=M_+ \Rightarrow (-4;4)$. Всі можливі корені входять в цей інтервал.

Знайдемо $f(1)$ та $f(-1)$:

$f(1)=2-5+6-2=1$,

$f(-1)=-2-5-6-2=-15$.

Поставимо умову, щоб числа $\frac{1}{p-q}$ і $\frac{15}{p-q}$ були цілими:

	$\frac{1}{p-q}$	$\frac{15}{p-q}$
$\frac{1}{2}$	*ціле*	*ціле*
$-\frac{1}{2}$	*дробове*	*ціле*

Задовольняє умову тільки $x_1=\frac{1}{2}$. Перевіримо за схемою Горнера чи буде $x_1=\frac{1}{2}$ коренем даного рівняння:

	2	–5	6	–2
½	2	–4	4	0

Отже, $x_1 = \dfrac{1}{2}$ є коренем многочлена. Знаходимо інші корені рівняння:

$$2x^2 - 4x + 4 = 0,$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0,$$

$$D = 4 - 8 = -4,$$

$$x_{2,3} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

Отже, задане рівняння має такі корені $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_{2,3} = 1 \pm i$.

Приклад 2. Розв’язати рівняння:
$x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 28x + 12 = 0$.

Розв’язання.

Знайдемо спочатку раціональні корені цього рівняння (якщо вони є). Раціональними коренями можуть бути такі числа: $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4;\ \pm 6; \pm 12$.

Застосуємо схему Горнера:

	1	–4	–13	28	12	
1	1	–3	–16	14	$26 \neq 0$	
–1	1	–5	–8	20	$-8 \neq 0$	
2	**1**	**–2**	**–17**	**–6**	**0**	$x = 2$ **корінь**
–2	1	–4	–9	$12 \neq 0$		
3	1	1	–14	$-48 \neq 0$		
–3	**1**	**–5**	**–2**	**0**		$x = -3$ **корінь**

Решту коренів знайдемо з рівняння:

$x^2 - 5x - 2 = 0$.

$D = 25 + 8 = 33$

$$x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

Отже, задане рівняння має такі корені: $x_1 = 2$**,** $x_2 = -3$**,**

$$x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

Приклад 3. Розв’язати рівняння: $2x^3 + 3x^2 + 6x - 4 = 0$.

Розв’язання.

Знайдемо спочатку раціональні корені цього рівняння (якщо вони є). Раціональними коренями можуть бути такі числа: $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 4;\ \pm \dfrac{1}{2}$.

Застосуємо схему Горнера:

	2	3	6	–4	
1	2	5	11	$7 \neq 0$	
–1	2	1	5	$-9 \neq 0$	
2	2	7	20	$36 \neq 0$	
–2	2	–1	8	$-20 \neq 0$	
4	2	11	50	$246 \neq 0$	
–4	2	–5	26	$-108 \neq 0$	
$\dfrac{1}{2}$	2	4	8	0	$x = -\dfrac{1}{2}$ корінь

Решту коренів знайдемо з рівняння:

$$2x^2 + 4x + 8 = 0$$

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$D = 4 - 16 = -12$$

$$x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{12i^2}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i.$$

Отже, задане рівняння має такі корені: $x_1 = -\dfrac{1}{2}$, $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}i$.

Приклад 4. Знайти раціональні корені рівняння:

$$\frac{16}{x^3 + 3x^2 - x + 5} - \frac{5}{x^3 + 3x^2 - x + 2} = 1.$$

Розв’язання.

Робимо заміну:

$$x^3 + 3x^2 - x + 2 = a \ \Rightarrow\ x^3 + 3x^2 - x + 5 = a + 3.$$

$$\frac{16}{a+3}-\frac{5}{a}=1,$$

$$\frac{16a-5a-15-a^2-3a}{a(a+3)}=0,$$

$$a^2-8a+15=0,$$

$$a_1=5,\ a_2=3.$$

Повертаємось до змінної x. Отримаємо два рівняння: $x^3+3x^2-x-1=0$ та $x^3+3x^2-x-3=0$.

Раціональними коренями першого рівняння можуть бути числа ±1, а другого рівняння числа ±1 $,\pm3$. Перевіркою переконаємося, що коренями є $x_1=1, x_2=-1, x_3=-3.$

Приклад 5. Розкласти многочлен на незвідні у полі Q множники, якщо $f(x)=6x^4-13x^3+12x^2-13x+6$.

Розв'язання.

$$f(x)=6x^4-13x^3+12x^2-13x+6=\left(6x^4+12x^2+6\right)-\left(13x^3+13x\right)=$$

$$=6\left(x^4+2x^2+1\right)-13x\left(x^2+1\right)=6\left(x^2+1\right)^2-13x\left(x^2+1\right)=$$

$$=\left(x^2+1\right)\left(6x^2-13x+6\right).$$

Приклад 6. Знайти кратність коренів многочлена $f(x)=x^5+3x^4-x^3-7x^2+4.$

Розв'язання.

Коренями можуть бути числа $\pm1, \pm2, \pm4.$

Скористаємося схемою Горнера:

	1	3	–1	–7	0	4	
1	1	4	3	–4	–4	0	$x=1$ корінь
1	1	5	8	4	0		Перевірка кратності кореня
1	1	6	14	18			Перевірка кратності кореня
–1	1	4	4	0			$x=-1$ корінь

–1	1	3	1				Перевірка кратності кореня
2	1	6	20				2 не є коренем
–2	1	2	0				$x=-2$ корінь
–2	1	0					Перевірка кратності кореня
–2	1						Перевірка кратності кореня

Як бачимо рівняння має три кореня: $\pm1, -2$. Корені $x=1$ та $x=-2$ мають кратність два, а $x=-1$ – це корінь кратності один.

СПИСОК ОСНОВНИХ ПОНЯТЬ

А

Алгебраїчна рівність многочленів: рівними називаються многочлени $f(x)$ і $g(x)$ (позначають $f(x)=g(x)$), якщо їх канонічні форми збігаються, тобто мають однакові степені і попарно рівні відповідні коефіцієнти.

Алгебраїчно замкнуте поле – поле P, якщо воно є полем розкладу для будь–якого многочлена $f(x)\in P[x]$ ненульового степеня.

Алгоритм Евкліда – алгоритм для знаходження найбільшого спільного дільника двох многочленів $f(x)$ і $g(x)$, причому $\deg f(x)\ge \deg g(x)$. Виконаємо послідовне ділення з остачею: $f(x)=g(x)s_1(x)+r_1(x)$, $g(x)=r_1(x)s_2(x)+r_2(x)$, $r_1(x)=r_2(x)s_3(x)+r_3(x)$, ..., $r_{n-2}(x)=r_{n-1}(x)s_n(x)+r_n(x)$, $r_{n-1}(x)=r_n(x)s_{n+1}(x)$. Остання, відмінна від нуля, остача $r_n(x)$ у цій системі рівностей і є НСД многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

Асоційовані многочленами в кільці P_n – многочлени, які відрізняються множником, який є відмінною від нуля константою: $f(x)=cg(x)$ або $\mathrm{g}(\mathrm{x})=\frac{1}{c}\cdot f(x)=c^{-1}\cdot f(x)$.

В

Взаємно простими називаються многочлени $f(x), g(x)\in P[x]$, якщо їх спільний дільник є многочленом нульового степеня: $(f(x), g(x))=1$.

Відокремленням цілої частини називається зображення неправильного дробу у вигляді $\frac{f(x)}{g(x)}=s(x)+\frac{f_1(x)}{g(x)}$.

Вільним (нульовим) членом многочлена $f(x)=a_nx^x+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ називається елемент a_0.

Д

Дискримінантом $D(f)$ **многочлена** $f(x)$ називається вираз виду $D(f)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_n^{-1}R(f,f')$, де $R(f,f')$ – результант $f(x)$ і його похідної $f'(x)$.

Дискримінантом рівняння $x^3+px+q=0$ називають число $D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$.

Многочлен $f(x)\in P[x]$ **ділиться націло** на $g(x)\in P[x]$ (записується $f(x)\vdots g(x)$), якщо остача $r(x)$ при діленні $f(x)$ на $g(x)$ дорівнює нулю, тобто якщо існує многочлен $s(x)\in P[x]$ такий, що $f(x)=g(x)s(x)$.

Добутком многочленів $f(x)$ і $g(x)$ називають многочлен $p(x)=c_{n+m}x^{n+m}+c_{n+m-1}x^{n+m-1}+\ldots+c_1x+c_0$,

де $c_k=\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}b_j=a_kb_0+a_{k-1}b_1+\ldots+a_1b_{k-1}+a_0b_k \quad (k=0,1,\ldots,n+m)$ або

$c_k=\sum_{i+j=k}a_ib_j$, $a_{k-j}=0$ при $\mathrm{k-j>0, b_j=0}$ при $\mathrm{j>m}$, тобто

$p(x)=f(x)\cdot g(x)$.

Е

Елементарним дробом у полі P називається раціональний дріб виду $\frac{f(x)}{(g(x))^k}$, де $g(x)$ – незвідний многочлен у полі P, $f(x)\in P[x]$ і $\deg f(x)\le\deg g(x)$, а k – будь–яке натуральне число.

З

Звідним (складеним) у полі P називається **многочлен** $f(x)\in P[x]$, якщо $\deg f(x)\ge 1$ і в кільці $P[x]$ існують многочлени $f(x)$ і $g(x)$, такі, що $f(x)=g(x)s(x)$, причому $\deg g(x)\geq 1$ і $\deg s(x)\geq 1$.

Звідним у полі P називається **многочлен** $g\in P_n$, якщо $\deg g\geq 1$ і $\underset{U,V\in P_n}{\exists}\left(g=UV\wedge \deg U\geq 1\wedge \deg V\geq 1\right)$.

Значенням многочлена $f(x)$ при $x=\alpha$ називається вираз $f(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+...+a_1\alpha+a_0$ з кільця R, якщо многочлен $f(x)\in R[x]$ має канонічну форму і $\alpha\in R[x]$.

І

Інтерполяційним многочленом Лагранжа називають многочлен $f(x)=\sum_{i=1}^{n+1}\beta_i\frac{(x-\alpha_1)...(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})...(x-\alpha_{n+1})}{(\alpha_i-\alpha_1)...(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})...(\alpha_i-\alpha_{n+1})}$, де коефіцієнти c_0, c_1, ..., c_n визначаються послідовною підстановкою значень $x=\alpha_1, x=\alpha_2,..., x=\alpha_{n+1}$.

Інтерполяційним многочленом Ньютона називають многочлен $f(x)=c_0+c_1(x-\alpha_1)+...+c_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)$.

К

Канонічним розкладом многочлена $f(x)$ у полі $P[x]$ називається зображення $f(x)=(p_1(x))^{k_1}(p_2(x))^{k_2}...(p_m(x))^{k_m}$, де $p_k(x)$ – попарно різні (неасоційовні) многочлени, незвідні у полі P[x]. Це зображення єдине з точністю до сталих множників і їх нумерації.

Канонічною формою многочлена $f(x)$ називається упорядкування його членів за спаданням степеня x^k.

Кільцем многочленів $R[x_1,...,x_n]$ **від** n **змінних** $x_1,...,x_n$ над областю цілісності R називається кільце многочленів від однієї змінної x_n над кільцем $R[x_1,...,x_n]$, тобто $R[x_1,...,x_n]=R[x_1,...,x_{n-1}][x_n]$.

Коефіцієнтом члена $a_i x_1^{K_{1i}} x_2^{K_{2i}} ... x_n^{K_{ni}}$ **многочлена** $f = \sum_{i=1}^{m} a_i x_1^{k_{1i}} x_2^{k_{2i}} ... x_n^{k_{ni}}$ називається відповідний елемент $a_i \in R$.

Константами називають многочлени нульового степеня, позначають $\theta(x) = 0$.

Коренем многочлена $f(x) \in P[x]$ називається елемент α будь–якого розширення поля P такий, що $f(\alpha) = 0$.

Коренем многочлена $f(x) \in P[x]$ називається елемент $\alpha \in P$, якщо $f(x)$ ділиться на $x - \alpha$.

Коренем многочлена $f(x)$ називається число α, якщо $f(\alpha) = 0$.

Кратними множниками кратності k_j **многочлена** $f(x)$ буде многочлен $p_j(x)$, що входить у канонічний розклад $f(x) = (p_1(x))^{k_1}(p_2(x))^{k_2}...(p_m(x))^{k_m}$ у степені з показником k_j.

Кратними множниками многочлена називаються множники, кратність яких більша за 1.

Кратні корені – корені, кратність яких більша за 1.

k-кратним коренем (або коренем k-ї кратності) називається елемент $\alpha \in$ P многочлена $f(x) \in P[x]$, якщо $f(x)$ ділиться на $(x - \alpha)^k$, але не ділиться на $(x - \alpha)^{k+1}$.

***k*-тим членом** або **членом *k*-го степеня** многочлена $f(x) = a_n x^x + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ називається вираз $a_k x^k$ ($k = \overline{1, n}$).

Л

Лексикографічним записом многочлена називається відношення "бути вищим" на множині членів многочленів, що є лінійним строгим порядком. Нехай $a x_1^{K_1} x_2^{K_2} ... x_n^{K_n}$ і $b x_1^{L_1} x_2^{L_2} ... x_n^{L_n}$ – два члени многочлена $f(x_1, ..., x_n)$. Вважається, що перший елемент вищий від другого, якщо $K_1 = L_1, K_2 = L_2, ..., K_{i-1} = L_{i-1}, K_i > L_i$. Позначають $ax_1^{K_1} x_2^{K_2} ... x_n^{K_n} \succ bx_1^{L_1} x_2^{L_2} ... x_n^{L_n}$.

Лінійним представленням НСД двох многочленів $f(x), g(x) \in P[x]$ – це запис виду $d(x) = f(x)U(x) + g(x)V(x)$, де $U(x)$ і $V(x)$ – деякі многочлени з $P[x]$, $d(x)$ – найбільший спільний дільник.

М

Метод Ньютона – один з методів знаходження меж дійсних коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами.

Многочленом (поліномом) від однієї змінної над областю цілісності R називається вираз виду $f(x) = a_n x^x + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, де n – довільне ціле невід'ємне число, $a_n, ..., a_1, a_0$ – елементи R, $x, x^2, ..., x^n$ – деякі символи, x^k – k-ий степінь змінної x, a_k – k-ий коефіцієнт многочлена або коефіцієнт при x^k ($k = \overline{1, n}$).

Многочленом від n **змінних над** R називається кожний елемент кільця $R[x_1, ..., x_n]$ і позначається $f(x_1, ..., x_n)$.

Множником кратності k_j **многочлена** $f(x)$ називається многочлен $p_j(x)$, що входить у канонічний розклад $f(x) = (p_1(x))^{k_1} (p_2(x))^{k_2} ... (p_m(x))^{k_m}$ у степені з показником k_j.

Н

Найбільшим спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$ називається їх спільний дільник, який ділиться на кожен інший спільний дільник $f(x)$ і $g(x)$. Позначається $(f(x), g(x))$.

Найменшим спільним кратним многочленів $f(x)$ і $g(x)$ називається їх спільне кратне, на яке ділиться кожне спільне кратне цих многочленів. Позначається $[f(x), g(x)]$.

Незвідним (нерозкладним, простим) називається многочлен $f(x) \in P[x]$ у полі P, якщо він не є константа і не має дільників, відмінних від константи і від многочлена виду $c \cdot f(x)$, де c – константа.

Незвідним у полі *P* називається многочлен $p \in P_n$, якщо $\deg p \geq 1$ і $\underset{U,V \in P_n}{\forall} (p = UV \Rightarrow \deg U = 0 \vee \deg V = 0)$.

Неправильним називається раціональний дріб $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, якщо степінь $f(x)$ більша за степінь $g(x)$.

Нуль–многочленом над *R* називають елемент $\theta \in R$, який вважають константою та многочленом, і позначаємо $\theta(x)$.

О

Область цілісності – комутативне кільце, в якому не існує дільників нуля.

Однорідним називається многочлена, у якого всі члени мають однаковий степінь.

П

Подібними називаються два члени, які відрізняються тільки коефіцієнтами.

Поле розкладу многочлена $f(x)$ – поле L, в якому многочлен розкладається на лінійні множники.

Похідною від многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in$ називається многочлен $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)x_{n-1}a^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1$.

Правильним називається раціональний дріб $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, якщо степінь многочлена $f(x)$ менша за степінь многочлена $g(x)$, в іншому разі дріб – **неправильний**.

Примітивним (відносно S) називається многочлен $f(x)\in S[x]$, $f(x)\neq 0$, якщо НСД його коефіцієнтів дорівнює одиниці.

Примітивним називається многочлен $p(x)$ з цілими коефіцієнтами, якщо його коефіцієнти не мають спільних дільників, відмінних від ± 1.

Прості корені – корені кратності 1.

Р

Раціональним дробом над P називається кожний елемент поля раціональних дробів $P(x)$.

Результантом многочленів $f(x)$ і $g(x)$ називається вираз виду $R(f,g)=a_n^m g(a_1)g(\alpha_2)...g(\alpha_n)$, де $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ – корені многочлена $f(x)$.

Розкладом многочлена $f(x)$ називається зображення $f(x)=p_1(x)p_2(x)....p_l(x)$ многочлена на незвідні множники у полі $P[x]$.

Розкласти многочлен $f(x)$ **за степенями** $x-\alpha$ означає представити його у вигляді:
$f(x)=c_n(x-\alpha)^n+c_{n-1}(x-\alpha)^{n-1}+c_1(x-\alpha)+c_0$.

С

Симетричним відносно змінних $x_1,...,x_n$ називається многочлен $f(x_1,...,x_n)$, якщо внаслідок довільної перестановки змінних $x_1,...,x_n$ утворюється многочлен рівний даному.

Спільним дільником $f(x)$ і $g(x)$ називається многочлен $d(x)$, який є дільником многочлена $f(x)$ і многочлена $g(x)$.

Спільним кратним многочленів $f(x),g(x)\in P[x]$ називають будь-який многочлен $s(x)\in P[x]$ такий, що $s(x)\vdots f(x)\wedge s(x)\vdots g(x)$.

Старшим членом називається відмінний від нуля член многочлена $f(x)$, степінь якого більший за степінь усіх інших відмінних від нуля членів цього многочлена, його коефіцієнт називається **старшим коефіцієнтом**, а його степінь – **степенем многочлена** $f(x)$.

Степенем члена $ax_1^{K_1}x_2^{K_2}...x_n^{K_n}$ **многочлена** називається сума $K_1+K_2+...+K_n$. Число K_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ називається **степенем даного члена відносно** x_i. Найбільший із степенів членів називається **степенем многочлена**, а член з найбільшим степенем – **старшим членом многочлена**.

Сумою многочленів $f(x)$ і $g(x)$ називають многочлен

$$s(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_{m+1}x^{m+1}+(a_m+b_m)x^m+$$
$$+(a_{m-1}+b_{m-1})x^{m-1}+...+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0),$$

тобто $s(x)=f(x)+g(x)$ $(n\ge m\ge 0)$.

Ф

Функціональна рівність многочленів: якщо область цілісності R має характеристику 0, то многочлени $f(x),g(x)\in R[x]$ рівні між собою тоді і тільки тоді, коли рівні функції φ_f і φ_g, які вони визначають.

Формулою Кардано називається формула, за якою знаходяться корені рівняння $x^3+px+q=0$:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}.$$

Ч

Членом многочлена $f(x_1,...,x_n)$ називається кожен доданок $a_ix_1^{K_{1i}}x_2^{K_{2i}}...x_n^{K_{ni}}$ в сумі $f=\sum_{i=1}^{m}a_ix_1^{k_{1i}}x_2^{k_{2i}}...x_n^{k_{ni}}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра и теорія чисел: Практикум. Ч.2. / [Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пілаєв В.В., Рокицький І.О.] – К.: Вища школа. Головне видавництво, 1986 — 264 с.
2. Алгебра и теория чисел / Казачек Н.А. [и др.]; под. ред. Виленкин Н.Я. – М.: Просвещение, 1974. – 200 с.
3. Бородін О.І. Теорія чисел / Бородін О.І. – К.: Вища школа. Головне видавництво, 1970 – 274 с.
4. Виноградов И.М. Основы теории чисел / Виноградов И.М. – М.: Наука, 1981. – 176 с.
5. Завало С.Т. Курс алгебры / Завало С.Т. – К.: Вища шк. Головне видавництво, 1985. – 504 с.
6. Завало С.Т. Алгебра і теорія чисел. Ч.2 / Завало С.Т., Костарчук В.Н, Хацет В.И. – К.: Вища школа. Головне видавництво, 1977. – 384 с.
7. Кострикин А.И. Введение в алгебру / Кострикин А.И. – М.: Наука, 1977. – 496 с.
8. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел / Куликов Л.Я. – М.: Высшая школа, 1979. – 559 с.
9. Курдеватов Г.А. Сборник задач по теории чисел / Курдеватов Г.А. – М.: Просвещение, 1970. – 128 с.
10. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / Курош А.Г. – М.: Наука, 1971. – 432с.
11. Ляпин Е.С. Алгебра и теория чисел. Ч.2. / Ляпин Е.С., Евсеев А.Е. – М.: Просвещение, 1978. – 448 с.
12. Проскуряков И.В. Числа и многочлены / Проскуряков И.В. – М.: Просвещение, 1965. – 284 с.
13. Солодовников А.С. Задачник–практикум по алгебре Ч. IV / Солодовников А.С., Родина М.А. – М.: Просвещение, – 1985. – 128 с.
14. Фадеев Д.К. Лекции по алгебре / Фадеев Д.К. – М.: Наука, 198. – 416 с.
15. Фаддеев Д.К. Сборник задач по высшей алгебре / Фаддеев Д.К. Соминский И.С. – М.: Наука, 1977. – 288 с.

Навчально-методичне видання

Ходаковська Олена Олександрівна
Гордієнко Наталія Михайлівна
Ілляшенко Надія Григорівна
Атамась Володимир Васильович

ТЕОРІЯ МНОГОЧЛЕНІВ

Частина І

Навчально–методичний посібник

Комп'ютерний набір та верстання –
О. О. Ходаковська, Н. М. Гордієнко

Підписано до друку . Формат 60×84/16
Ум. друк. арк. 1,72. Тираж 300 пр. Зам. №

Виготовлено з оригіналу-макету
У Черкаському національному університеті
імені Богдана Хмельницького
Адреса: бульвар Шевченка, 81, м. Черкаси, Україна, 18031
Тел. (0472) 37-13-16, факс (0472) 35-44-63
e-mail: vydav@cdu.edu.ua, http://www/cdu.edu.ua
Свідоцтво про внесення до державного реєстру
суб'єктів видавничої справи ДК №3427 від 17.03.2009 р.